

Questão 1. (3,0 pontos) Decida se a série converge ou diverge

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\sqrt{2}}} \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{11^n \cdot (n!)^3}{(3n)!} \qquad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}}$$

Solução. (a) Vamos usar Critério da Integral para estudar a convergência da série. Consideremos a função

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^{\sqrt{2}}}$$

definida no intervalo $[2, \infty)$. Temos

- i) f é contínua, $f(x) > 0$, para todo $x \geq 2$ e $f(n) = \frac{1}{n(\ln n)^{\sqrt{2}}}$, para todo inteiro $n \geq 2$;
- ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$;
- iii) $f(x)$ é decrescente em $[2, \infty)$, pois sua derivada é negativa:

$$f'(x) = \frac{-[(\ln x)^{\sqrt{2}} + \sqrt{2}(\ln x)^{\sqrt{2}-1}]}{[x(\ln x)^{\sqrt{2}}]^2}.$$

Pelo Critério da Integral, a série dada converge se e somente se a integral imprópria $\int_2^{\infty} f(x) dx$ converge. Fazendo a mudança de variável $u = \ln x$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^{\sqrt{2}}} dx &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_2^M \frac{1}{x(\ln x)^{\sqrt{2}}} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{\ln 2}^M u^{-\sqrt{2}} du \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{u^{-\sqrt{2}+1}}{-\sqrt{2}+1} \Big|_{\ln 2}^M = \frac{(\ln 2)^{1-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-1} \end{aligned}$$

e portanto a integral imprópria é convergente. Assim, a série dada é convergente.

(b) Utiliza-se o Critério da Razão. Para isso, deve-se calcular:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Calculando a razão:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{11^{n+1} \cdot [(n+1)!]^3}{[3(n+1)]!} \cdot \frac{(3n)!}{11^n (n!)^3} \\ &= \frac{11(n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \\ &= \frac{11n^2 + 22n + 11}{27n^2 + 27n + 6} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11n^2 + 22n + 11}{27n^2 + 27n + 6} = \frac{11}{27} < 1.$$

Pelo Critério da Razão, a série converge.

(c) Utiliza-se o Critério da Comparação no limite, usando $b_n = \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^{1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}}} = e^0 = 1.$$

Logo, $\sum a_n$ e $\sum b_n$ têm mesmo comportamento. Como $\sum b_n$ diverge (série harmônica), pelo Critério da Comparação no limite, a série dada diverge.

Observação: Para calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{3}}}$ usamos a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x^{-1/3} = 0; \quad \text{logo } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{3}}} = 0.$$

Questão 2 (3,0 pontos) Decida se a série converge condicionalmente ou absolutamente ou diverge.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+5}{2n^2+3n+1} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n^{\frac{1}{n}}-1)^n}{5^n+1} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \operatorname{sen} \frac{1}{n}\right).$$

Solução. (a) Trata-se de uma série alternada da forma $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, onde $a_n = \frac{3n+5}{2n^2+3n+1}$. Claramente, $a_n > 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Para verificarmos as hipóteses do Critério de Leibnitz, falta mostrarmos que $\{a_n\}$ é decrescente. Para isso, considere a função $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{3x+5}{2x^2+3x+1}$. Como

$$f'(x) = \frac{3(2x^2+3x+1) - (3x+5)(4x+3)}{(2x^2+3x+1)^2} = \frac{-(9x^2+20x+12)}{(2x^2+3x+1)^2},$$

f é estritamente decrescente em $[1, \infty)$ e, portanto, $f(n+1) < f(n)$, para todo inteiro $n \geq 1$. Isso significa que $a_{n+1} < a_n$, para todo $n \geq 1$, e assim $\{a_n\}$ é decrescente. Pelo Critério de Leibnitz, a série dada é convergente.

Vamos mostrar que a série não é absolutamente convergente. Para isso, vamos usar o Critério da Comparação no limite com $b_n = \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n+5}{2n^2+3n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+5n}{2n^2+3n+1} = \frac{3}{2}.$$

Pelo critério da comparação no limite, as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ têm o mesmo caráter. Como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge,

segue-se que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Portanto, a série dada converge condicionalmente.

(b) Utiliza-se o critério da raiz:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{(3n^{\frac{1}{n}}-1)^n}{5^n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^{\frac{1}{n}}-1}{\sqrt[n]{5^n+1}}.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^{\frac{1}{n}}-1}{\sqrt[n]{5^n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^{\frac{1}{n}}-1}{5 \sqrt[n]{1+\frac{1}{5^n}}} = \frac{2}{5} < 1.$$

Pelo Critério da Raiz, a série converge absolutamente.

(c) Seja $a_n = 1 - n \operatorname{sen} \frac{1}{n}$. Vamos utilizar o Critério da Comparação no limite com $b_n = \frac{1}{n^2}$. Fazendo a mudança $u = \frac{1}{n}$, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n \operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u - \operatorname{sen} u}{u^3}.$$

Utilizando a Regra de L'Hôpital duas vezes consecutivas, obtemos

$$\lim_{u \rightarrow 0+} \frac{u - \operatorname{sen} u}{u^3} = \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{1 - \cos u}{3u^2} = \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{\operatorname{sen} u}{6u} = \frac{1}{6}.$$

Como $\sum b_n$ converge (série harmônica de ordem 2), a série $\sum |a_n|$ é convergente e, portanto, a série dada é absolutamente convergente.

Questão 3:

(a) (1,5 pontos) Para quais $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{tg} x)^{3n}$ converge? Calcule o valor da série para $x = \frac{\pi}{6}$.

(b) (2,5 pontos) Determine todos os valores de x para os quais a série converge absolutamente, converge condicionalmente ou diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^{3n}$$

Solução: (a) Utiliza-se o critério da raiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\operatorname{tg} x|^{3n}} = |\operatorname{tg} x|^3.$$

Pelo Critério da Raiz, a série converge absolutamente para $|\operatorname{tg} x| < 1$. Logo:

$$-1 < \operatorname{tg} x < 1 \implies -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}.$$

Para $x = \frac{\pi}{4}$ a série fica: $\sum_{n=1}^{\infty} 1^{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$, que diverge.

Para $x = -\frac{\pi}{4}$ a série fica: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, que diverge.

Logo, a série converge para $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$.

Para $x = \frac{\pi}{6}$, obtém-se uma série geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3\sqrt{3}}{27}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{9 - \sqrt{3}}.$$

(b) Aplicando o critério da raiz ao módulo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^3}{\sqrt[n]{n}2} = \frac{|x|^3}{2}.$$

A série converge absolutamente quando $\frac{|x|^3}{2} < 1$, isto é, quando $|x| < \sqrt[3]{2}$, e diverge quando $|x| > \sqrt[3]{2}$. Analisando os extremos do intervalo de convergência, temos:

- para $x = \sqrt[3]{2}$, a série é dada por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que diverge (série harmônica de grau 1).

- para $x = -\sqrt[3]{2}$ a série é dada por $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, que converge condicionalmente (pelo critério das séries alternadas).

Logo, a série dada:

- converge absolutamente quando $-\sqrt[3]{2} < x < \sqrt[3]{2}$;

- converge condicionalmente quando $x = -\sqrt[3]{2}$;

- diverge quando $x \geq \sqrt[3]{2}$ ou $x < -\sqrt[3]{2}$.

Questão 1. (3,0 pontos) Decida se a série converge ou diverge

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\sqrt{3}}} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n \cdot (n!)^3}{(3n)!} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt[4]{n}}}}$$

Solução. a) Vamos usar Critério da Integral para estudar a convergência da série. Consideremos a função

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^{\sqrt{3}}}$$

definida no intervalo $[2, \infty)$. Temos

i) f é contínua, $f(x) > 0$, para todo $x \geq 2$ e $f(n) = \frac{1}{n(\ln n)^{\sqrt{3}}}$, para todo inteiro $n \geq 2$;

ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$;

iii) $f(x)$ é decrescente em $[2, \infty)$, pois sua derivada é negativa:

$$f'(x) = \frac{-[(\ln x)^{\sqrt{3}} + \sqrt{3}(\ln x)^{\sqrt{3}-1}]}{[x(\ln x)^{\sqrt{3}}]^2}.$$

Pelo Critério da Integral, a série dada converge se e somente se a integral imprópria $\int_2^{\infty} f(x) dx$ converge. Fazendo a mudança de variável $u = \ln x$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^{\sqrt{3}}} dx &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_2^M \frac{1}{x(\ln x)^{\sqrt{3}}} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{\ln 2}^M u^{-\sqrt{3}} du \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{u^{-\sqrt{3}+1}}{-\sqrt{3}+1} \Big|_{\ln 2}^M = \frac{(\ln 2)^{1-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1} \end{aligned}$$

e portanto a integral imprópria é convergente. Assim, a série dada é convergente.

(b) Utiliza-se o Critério da Razão. Para isso, deve-se calcular:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Calculando a razão:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{7^{n+1} \cdot [(n+1)!]^3}{[3(n+1)]!} \cdot \frac{(3n)!}{7^n (n!)^3} \\ &= \frac{7(n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \\ &= \frac{7n^2 + 14n + 7}{27n^2 + 27n + 6} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + 14n + 7}{27n^2 + 27n + 6} = \frac{7}{27} < 1.$$

Pelo Critério da Razão, a série converge.

(c) Utiliza-se o Critério da Comparação no limite, usando $b_n = \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt[4]{n}}}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^{1+\frac{1}{\sqrt[4]{n}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n}}} = e^0 = 1.$$

Logo, $\sum a_n$ e $\sum b_n$ têm mesmo comportamento. Como $\sum b_n$ diverge (série harmônica), pelo Critério da Comparação no limite, a série dada diverge.

Observação: Para calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{4}}}$ usamos a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{4}x^{-3/4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 4x^{-1/4} = 0; \quad \text{logo } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{4}}} = 0.$$

Questão 2 (3,0 pontos) Decida se a série converge condicionalmente ou absolutamente ou diverge.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{3n^2+2n+1} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n^{\frac{1}{n}}-1)^n}{3^n+1} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \operatorname{sen} \frac{1}{n}\right).$$

Solução. (a) Trata-se de uma série alternada da forma $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, onde $a_n = \frac{2n+1}{3n^2+2n+1}$. Claramente, $a_n > 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Para verificarmos as hipóteses do Critério de Leibnitz, falta mostrarmos que $\{a_n\}$ é decrescente. Para isso, considere a função $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{2x+1}{3x^2+2x+1}$. Como

$$f'(x) = \frac{2(3x^2+2x+1) - (2x+1)(6x+2)}{(3x^2+2x+1)^2} = \frac{-(6x^2+6x)}{(2x^2+3x+1)^2},$$

f é estritamente decrescente em $[1, \infty)$ e, portanto, $f(n+1) < f(n)$, para todo inteiro $n \geq 1$. Isso significa que $a_{n+1} < a_n$, para todo $n \geq 1$, e assim $\{a_n\}$ é decrescente. Pelo Critério de Leibnitz, a série dada é convergente.

Vamos mostrar que a série não é absolutamente convergente. Para isso, vamos usar o Critério da Comparação no limite com $b_n = \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+1}{3n^2+2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+n}{3n^2+2n+1} = \frac{2}{3}.$$

Pelo critério da comparação no limite, as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ têm o mesmo caráter. Como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge,

segue-se que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Portanto, a série dada converge condicionalmente.

(b) Utiliza-se o critério da raiz:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{(3n^{\frac{1}{n}}-1)^n}{3^n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^{\frac{1}{n}}-1}{\sqrt[n]{3^n+1}}.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^{\frac{1}{n}}-1}{\sqrt[n]{3^n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^{\frac{1}{n}}-1}{3 \sqrt[n]{1+\frac{1}{3^n}}} = \frac{2}{3} < 1.$$

Pelo Critério da Raiz, a série converge absolutamente.

(c) Seja $a_n = 1 - n \operatorname{sen} \frac{1}{n}$. Vamos utilizar o Critério da Comparação no limite com $b_n = \frac{1}{n^2}$. Fazendo a mudança $u = \frac{1}{n}$, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n \operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u - \operatorname{sen} u}{u^3}.$$

Utilizando a Regra de L'Hôpital duas vezes consecutivas, obtemos

$$\lim_{u \rightarrow 0+} \frac{u - \operatorname{sen} u}{u^3} = \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{1 - \cos u}{3u^2} = \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{\operatorname{sen} u}{6u} = \frac{1}{6}.$$

Como $\sum b_n$ converge (série harmônica de ordem 2), a série $\sum |a_n|$ é convergente e, portanto, a série dada é absolutamente convergente.

Questão 3:

(a) (1,5 pontos) Para quais $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{tg} x)^{2n}$ converge? Calcule o valor da série para $x = \frac{\pi}{6}$.

(b) (2,5 pontos) Determine todos os valores de x para os quais a série converge absolutamente, converge condicionalmente ou diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} x^{3n}$$

Solução: (a) Utiliza-se o critério da raiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\operatorname{tg} x|^{2n}} = |\operatorname{tg} x|^2.$$

Pelo Critério da Raiz, a série converge absolutamente para $|\operatorname{tg} x| < 1$. Logo:

$$-1 < \operatorname{tg} x < 1 \implies -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}.$$

Para $x = \frac{\pi}{4}$ a série fica: $\sum_{n=1}^{\infty} 1^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$, que diverge.

Para $x = -\frac{\pi}{4}$ a série fica: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$, que diverge.

Logo, a série converge para $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$.

Para $x = \frac{\pi}{6}$, obtém-se uma série geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2}.$$

(b) Aplicando o critério da raiz ao módulo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^3}{\sqrt[n]{n3}} = \frac{|x|^3}{3}.$$

A série converge absolutamente quando $\frac{|x|^3}{3} < 1$, isto é, quando $|x| < \sqrt[3]{3}$, e diverge quando $|x| > \sqrt[3]{3}$. Analisando os extremos do intervalo de convergência, temos:

- para $x = \sqrt[3]{3}$, a série é dada por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que diverge (série harmônica de grau 1).

- para $x = -\sqrt[3]{3}$ a série é dada por $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, que converge condicionalmente (pelo critério das séries alternadas).

Logo, a série dada:

- converge absolutamente quando $-\sqrt[3]{3} < x < \sqrt[3]{3}$;

- converge condicionalmente quando $x = -\sqrt[3]{3}$;

- diverge quando $x \geq \sqrt[3]{3}$ ou $x < -\sqrt[3]{3}$.