MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV
Escola Politécnica - 1ª Prova - 30/08/2010

Gabarito - Prova Tipo A

1ª Questão: Determine se cada uma das sequências $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ abaixo converge e, em caso afirmativo, calcule o limite:

(a) $a_n = \left(1 - 2\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{3n}$

Temos $a_n = e^{3n\ln(1-2\,\mathrm{sen}(1/n))}$ e, aplicando L'Hospital,

$$\lim_{n\to\infty}(3n\ln(1-2\,\mathrm{sen}(1/n))) = 3\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1-2\,\mathrm{sen}\,t)}{t} = 3\lim_{t\to 0^+}\frac{-2\cos t}{1-2\,\mathrm{sen}\,t} = -6\,,$$

portanto $\lim_{n\to\infty} a_n = e^{-6}$.

(b) $a_n = \dfrac{(-1)^n\; n + 2\;\ln\; n}{n\sqrt{n}+1}$

Temos

$$a_n = \underbrace{\frac{(-1)^n\; n}{n\sqrt{n}+1}}_{b_n} + 2\underbrace{\frac{\ln n}{n\sqrt{n}+1}}_{c_n}$$

e $b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\frac{1}{n}} \to 0$ e $c_n = \frac{\ln n}{n\sqrt{n}+1} \to 0$, por L'Hospital. Portanto, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(c) $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k+\sqrt{2k}}{\sqrt[3]{k}+\sqrt{3k}}$

Temos que $\lim_{k\to\infty}\frac{k+\sqrt{2k}}{\sqrt[3]{k}+\sqrt{3k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{1+\sqrt{2/k}}{\sqrt[3]{1/k^2}+\sqrt{3/k^2}} = \infty$, portanto $\{a_n\}$ diverge, pelo critério do termo geral.

2ª Questão: Determine se cada uma das série abaixo é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^{2n}}{(2n)!}$

Usando o critério da razão, temos que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(2n+2)^{2n+2}}{(2n+2)!}\,\frac{(2n)!}{(2n)^{2n}} = 4\frac{n^2+2n+1}{4n^2+5n+2}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^2 \to e > 1\,,$$

portanto, a série diverge.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt[3]{n}}\right)$

Pondo $a_n = \ln\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt[3]{n}}\right)$ e $b_n = \frac{2}{\sqrt[3]{n}}$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + 2/\sqrt[3]{n}\right)}{2/\sqrt[3]{n}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1\,.$$

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{n}}$ é divergente (série p, com $p = 1/3$), segue que a série do ítem (b) *não* é absolutamente convergente.

Como $\{a_n\}$ é uma sequência decrescente com limite zero, segue que a série é *condicionalmente convergente*, pelo critério de Leibniz.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{(\arctan\, n)^n \cdot n^3}{2^n}$

Como

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{(\arctan n)(\sqrt[n]{n})^3}{2} \to \frac{\pi}{4} < 1\,,$$

concluímos que a série converge absolutamente, pelo critério da raiz.

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{n^3 e^{n/2}}{e^n + 1}$

Temos que

$$\left|(-1)^n \frac{n^3 e^{n/2}}{e^n + 1}\right| \le \frac{n^3 e^{n/2}}{e^n} = n^3 e^{-n/2}\,.$$

Pondo $b_n = n^3 e^{-n/2}$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^3 e^{-1/2} = e^{-1/2} < 1\,,$$

logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge e, portanto, a série dada converge absolutamente, pelo crietério da comparação.

3ª Questão: Classifique as afirmações abaixo em verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas:

(a) A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{(n!)^2}{n^{2n}} \, x^n$ converge absolutamente se $|x| < e^2$.

Verdadeiro: Fixado x, temos

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{((n+1)!)^2}{(n+1)^{2n+2}} |x|^{n+1} \frac{n^{2n}}{(n!)^2 |x|^n} = \frac{1}{\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}^2} |x| \to \frac{|x|}{e^2}\,,$$

logo, pelo critério da razão, a série converge absolutamente se $|x| < e^2$.

(b) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+(-1)^n}{n^2}\right) \operatorname{sen} n$ é convergente.

Verdadeiro: Basta observar que

$$\left|\left(\frac{1+(-1)^n}{n^2}\right) \operatorname{sen} n\right| \leq \frac{2}{n^2}\,.$$

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} 2/n^2$ é convergente, a afirmação decorre do critério da comparação.

(c) A série $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{2^3} - ...$ é divergente.

Falso: Como as séries $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ e $0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ são absolutamente convergentes, a série obtida subtraindo a segunda da primeira também é absolutamente convergente, em particular convergente. O valor de sua soma é $2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV
Escola Politécnica - 1ª Prova - 30/08/2010

Gabarito - Prova Tipo B

1ª Questão: Determine se cada uma das sequências $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ abaixo converge e, em caso afirmativo, calcule o limite:

(a) $a_n = \left(1 + 3\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{2n}$

Temos $a_n = e^{2n\ln(1+3\,\mathrm{sen}(1/n))}$ e, aplicando L'Hospital,

$$\lim_{n\to\infty}(2n\ln(1+3\,\mathrm{sen}(1/n))) = 2\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+3\,\mathrm{sen}\,t)}{t} = 2\lim_{t\to 0^+}\frac{3\cos t}{1+3\,\mathrm{sen}\,t} = 6\,,$$

portanto $\lim_{n\to\infty} a_n = e^6$.

(b) $a_n = \dfrac{(-1)^n\; n - 4\ln\; n}{n\sqrt{n}+3}$

Temos

$$a_n = \underbrace{\frac{(-1)^n\; n}{n\sqrt{n}+3}}_{b_n} - 4\underbrace{\frac{\ln n}{n\sqrt{n}+3}}_{c_n}$$

e $b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\frac{3}{n}} \to 0$ e $c_n = \frac{\ln n}{n\sqrt{n}+3} \to 0$, por L'Hospital. Portanto, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(c) $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k+\sqrt{5k}}{\sqrt[3]{k}+\sqrt{2k}}$

Temos que $\lim_{k\to\infty}\frac{k+\sqrt{5k}}{\sqrt[3]{k}+\sqrt{2k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{1+\sqrt{5/k}}{\sqrt[3]{1/k^2}+\sqrt{2/k^2}} = \infty$, portanto $\{a_n\}$ diverge, pelo critério do termo geral.

2ª Questão: Determine se cada uma das série abaixo é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^{2n}}{(2n)!}$

Usando o critério da razão, temos que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(2n+2)^{2n+2}}{(2n+2)!}\,\frac{(2n)!}{(2n)^{2n}} = 4\frac{n^2+2n+1}{4n^2+5n+2}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^2 \to e > 1\,,$$

portanto, a série diverge.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ \ln \left(1 + \frac{3}{\sqrt[4]{n}}\right)$

Pondo $a_n = \ln\left(1 + \dfrac{3}{\sqrt[4]{n}}\right)$ e $b_n = \frac{3}{\sqrt[4]{n}}$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + 3/\sqrt[4]{n}\right)}{3/\sqrt[4]{n}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1\,.$$

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt[4]{n}}$ é divergente (série p, com $p = 1/4$), segue que a série do ítem (b) *não* é absolutamente convergente.

Como $\{a_n\}$ é uma sequência decrescente com limite zero, segue que a série é *condicionalmente convergente*, pelo critério de Leibniz.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ \frac{(\text{arctg } n)^n \cdot n^5}{3^n}$

Como

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{(\arctan n)(\sqrt[n]{n})^5}{3} \to \frac{\pi}{6} < 1\,,$$

concluímos que a série converge absolutamente, pelo critério da raiz.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ \frac{n^4 e^{n/3}}{e^n + 2}$

Temos que

$$\left|(-1)^n \frac{n^4 e^{n/3}}{e^n + 2}\right| \le \frac{n^4 e^{n/3}}{e^n} = n^4 e^{-2n/3}\,.$$

Pondo $b_n = n^4 e^{-2n/3}$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^4 e^{-2/3} = e^{-2/3} < 1\,,$$

logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge e, portanto, a série dada converge absolutamente, pelo crietério da comparação.

3ª Questão: Classifique as afirmações abaixo em verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas:

(a) A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{(n!)^2}{n^{2n}} \, x^n$ converge absolutamente se $|x| < e^2$.

Verdadeiro: Fixado x, temos

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{((n+1)!)^2}{(n+1)^{2n+2}}|x|^{n+1} \frac{n^{2n}}{(n!)^2|x|^n} = \frac{1}{\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^2}|x| \to \frac{|x|}{e^2},$$

logo, pelo critério da razão, a série converge absolutamente se $|x| < e^2$.

(b) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{n^2}\right) \cos n$ é convergente.

Verdadeiro: Basta observar que

$$\left|\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2}\right)\cos n\right| \leq \frac{2}{n^2}.$$

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} 2/n^2$ é convergente, a afirmação decorre do critério da comparação.

(c) A série $1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^3} + \dfrac{1}{3^3} - \ldots$ é divergente.

Falso: Como as séries $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ e $0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ são absolutamente convergentes, a série obtida subtraindo a segunda da primeira também é absolutamente convergente, em particular convergente. O valor de sua soma é $2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.