

Turma B

Questão 1: Decida se cada uma das seqüências $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ou não e, em caso afirmativo, calcule o limite.

(a) $(1,0) a_n = \sqrt{n - \sqrt{n}} - \sqrt{n}$

(b) $(1,0) a_n = \sum_{k=1}^n \frac{3k^2 + k + 1}{(4k + 1)^2}$

(c) $(1,0) a_n = \left(e^{3/n} - \frac{2}{n} \right)^n$

Solução:

(a)

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n - \sqrt{n}} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{n - \sqrt{n}} - \sqrt{n} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{n - \sqrt{n}} + \sqrt{n}}{\sqrt{n - \sqrt{n}} + \sqrt{n}} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}} + 1 \right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}} + 1 \right)} \end{aligned}$$

Sendo assim, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{1 - 0} + 1} = \frac{1}{2}$$

(b) O $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ resulta em uma série de termo geral:

$$b_k = \frac{3k^2 + k + 1}{(4k + 1)^2}$$

Desta forma, se a série convergir, temos que a seqüência converge.

Calculando o limite para $k \rightarrow \infty$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3k^2 + k + 1}{(4k + 1)^2} = \frac{3}{16}$$

Como o termo geral da série não tende a zero, ela não converge, o que resulta que a sequência também não converge.

(c)

$$a_n = \left(e^{3/n} - \frac{2}{n} \right)^n = e^{n \cdot \ln(e^{3/n} - \frac{2}{n})}$$

Calculando o limite do expoente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{3/n} - \frac{2}{n})}{\frac{1}{n}} =$$

Substituindo $x = \frac{1}{n}$, teremos ($n \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow 0$):

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(e^{3x} - 2x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3e^{3x} - 2}{e^{3x} - 2x} \right) = \frac{3 - 2}{1 - 0} = 1$$

Sendo assim:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^1$$

Questão 2: Decida se cada uma das séries converge ou diverge.

(a) $(1,0) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-3n} \left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{n^2}$

(b) $(1,5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{4^n - 5}$

(c) $(1,5) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ (discutir em função de p , sendo $p > 0$)

Solução:

(a) Sendo $\left(a_n = e^{-3n} \left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{n^2}\right) > 0$, podemos calcular a raiz n -ésima de a_n :

$$\sqrt[n]{a_n} = e^{-3} \left(\frac{n+4}{n+3}\right)^n = e^{-3+n \cdot \ln\left(\frac{n+4}{n+3}\right)}$$

Calculando o limite do expoente para o qual $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -3 + n \cdot \ln\left(\frac{n+4}{n+3}\right) = -3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{n+4}{n+3}\right)}{\frac{1}{n}} =$$

Aplicando L'Hospital, chega-se à:

$$= -3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 7n + 12} = -3 + 1 = -2$$

Sendo assim, pelo Critério da Raiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{-2}$$

Portanto, a série CONVERGE, pois $0 \leq \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}\right) < 1$

(b) Reescrevendo a série:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{4^n - 5} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+(-1)^{2n-1}}{4^{2n-1} - 5} + \frac{1+(-1)^{2n}}{4^{2n} - 5} \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^{2n}}{4^{2n} - 5} \end{aligned}$$

Aplicando o Critério da Razão:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{4^{2(n+1)} - 5} \right) \left(\frac{4^{2n} - 5}{2} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{2n} - 5}{4^{2n} \cdot 4^2 - 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{2n} \left(1 - \frac{5}{4^{2n}} \right)}{4^{2n} \left(4^2 - \frac{5}{4^{2n}} \right)} = \left(\frac{1}{16} \right) < 1 \end{aligned}$$

Sendo assim, a série CONVERGE.

(c) Seja $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p}$ para $x \in [2, +\infty[$. Temos $f(x) > 0$, f é decrescente pois

$$f'(x) = \frac{-[(\ln x)^p + p \cdot (\ln x)^{p-1}]}{(x(\ln x)^p)^2} < 0$$

se $x \geq 2$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ e $a_n = \frac{1}{n(\ln n)^p} = f(n), \forall n \geq 2$.

Assim, aplicando o Critério de Integral, a série $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, a integral imprópria

$\int_2^{+\infty} f(x) dx$ convergir.

Fazendo a mudança $u = \ln x$ (e $\therefore du = \frac{1}{x} dx$),

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int \frac{du}{u^p} = \begin{cases} \ln u = \ln(\ln x) & \text{se } p = 1 \\ \frac{u^{-p+1}}{-p+1} = \frac{(\ln x)^{-p+1}}{-p+1} & \text{se } p \neq 1 \end{cases}$$

Para $p = 1$:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln(\ln x)]_2^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln(\ln b) - \ln(\ln 2) = +\infty \text{ (diverge)}$$

Para $p \neq 1$,

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{(\ln x)^{-p+1}}{-p+1} \right]_2^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{(\ln b)^{-p+1}}{-p+1} - \frac{(\ln 2)^{-p+1}}{-p+1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } p < 1 \text{ (diverge)} \\ \frac{(\ln 2)^{-p+1}}{p-1} & \text{se } p > 1 \text{ (converge)} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^p} \begin{cases} \text{diverge} & \text{se } p \leq 1 \\ \text{converge} & \text{se } p > 1 \end{cases}$$

Questão 3: (3,0) Determine o raio e o intervalo máximo de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \cdot 3^n} \cdot (x+2)^n$$

Solução:

Sabemos que o raio de convergência da série acima será dado por $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, caso o limite exista (finito ou infinito). Assim,

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} \cdot 3^{n+1}}{\sqrt{n} \cdot 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{\sqrt{n}} = 3$$

Portanto, a série converge absolutamente quando $x \in (-5, 1)$ e diverge quando $x < -5$ ou $x > 1$.

Para $x = 1$ temos a seguinte série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

que diverge, por se tratar de uma série harmônica com grau $p < 1$.

Para $x = -5$, teremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Note que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ e $\frac{1}{\sqrt{n}}$ é claramente decrescente.

Logo, pelo Critério de Leibniz, temos que a série converge quando $x = -5$.

Logo, a série dada converge se $x \in [-5, 1)$.