Capítulo 1

Lógica de Primeira Ordem

> *Para evitar que qualquer coisa intuitiva penetrasse aqui despercebida, tive que envidar todo o esforço para manter as cadeias de inferências livres de lacunas. Na tentativa de obedecer a essa exigência do modo mais estrito possível, percebi que a inadequação da linguagem era um obstáculo; não importava quão complicadas fossem as expressões que eu estava disposto a aceitar, era cada vez menos capaz de atingir a precisão que eu requeria, conforme as relações tornavam-se mais e mais complexas. Essa deficiência levou-me à ideia desta ideografia.*
>
> Gottlob Frege, 1879.

> *Com essa notação, toda proposição toma a forma e precisão que as equações desfrutam em álgebra, e, de proposições assim escritas, outras podem ser deduzidas, por um procedimento que se parece com a solução de equações algébricas.*
>
> Giuseppe Peano, 1889.

Começaremos nosso estudo do Cálculo de Predicados de Primeira Ordem[1] com a descrição de contextos matemáticos, dos quais abstrairemos uma linguagem formal. Esses contextos serão caracterizados como classes de *estruturas*, tendo algumas características em comum (por exemplo, quando trabalhamos com a *Teoria dos Grupos*, eles têm em comum o fato de possuírem

[1]O significado desse nome pomposo encontra-se na seção de Introdução, a seguir.

uma operação binária [2] – a multiplicação; uma operação unária – a inversa; e um elemento distinguido – o elemento neutro da multiplicação). A coleção desses objetos (ou melhor, de signos rotulando tais elementos) que caracterizam as classes de estruturas será chamada de *assinatura* dessa classe. Em cima de cada assinatura, construiremos uma linguagem (alfabeto, termos e sentenças). Daremos uma semântica a essa linguagem, interpretando-a em cada estrutura da classe daquela assinatura (recuperando seu significado original). Com isto, introduziremos a noção de verdade (de Tarski), que estende a ideia das tabelas-verdade do cálculo proposicional. Introduziremos também um cálculo dedutivo que será correto (sintática respeita a semântica) e completo (a semântica reflete-se fielmente na sintática).

1.1 Introdução

Relembrando que Bertrand Russell desenvolveu sua Teoria de Tipos para evitar os paradoxos que uma linguagem formal muito expressiva apresentava, e que essa teoria dividia os objetos do discurso matemático em níveis, destacaram-se nos estudos posteriores os dois primeiros níveis: o nível zero (ou *ordem zero*), que consiste no que hoje chamamos de Cálculo Proposicional, e no nível 1 (ou *primeira ordem*) que seria o que hoje chamamos de Lógica (ou Cálculo de Predicados) de Primeira Ordem. Na verdade, são os únicos níveis em que o fenômeno da completitude acontece, ou seja, todas as fórmulas que puderem ser deduzidas no sistema todo, já poderiam sê-lo usando-se apenas axiomas e deduções restritos à primeira ordem. Já vimos a completude do nível zero no capítulo anterior e veremos a do nível 1 neste capítulo. No próximo capítulo veremos que perderemos o aspecto algorítmico do Teorema da Completude - ou seja, não existe nem um algoritmo que decida (uniformemente) se uma fórmula seria *válida* (o análogo de tautologia).

[2] É mais elegante do que dizer *operação de duas variáveis.*

1.2 A Teoria da Verdade de Tarski

Alfred Tarski [3] preocupou-se desde cedo com o problema filosófico de definir o conceito de *verdade* para sentenças de uma dada linguagem. Em seu famoso artigo *O Conceito de Verdade nas Linguagens Formalizadas* [4] atacou pela primeira vez o problema. Concluiu que era impossível definir verdade para as linguagens naturais [5], sendo passível de tratamento adequado o caso das linguagens formalizadas da matemática.

Essencialmente, dividiu seu contexto em duas linguagens, uma formalizada (ou *linguagem objeto*), para a qual se deseja definitr verdade e, portanto, não pode conter nenhuma noção interna de verdade, e uma linguagem mais expressiva, chamada de *metalinguagem*, com os seguintes requisitos:

1. ela deve conter a linguagem objeto;

2. deve interpretar os símbolos lógicos da linguagem objeto;

3. deve conter um mínimo necessário de Teoria dos Conjuntos.

Reduziu o problema de definição de verdade para a linguagem objeto à noção de *satisfação*, que veremos na seção seguinte.

Apesar de ser uma teoria matematicamente útil, não é completamente aceita filosoficamente [6].

[3] Seu nome verdadeiro era Alfred Tajtelbaum. Nasceu em Varsóvia, na Polônia, em 14 de janeiro de 1901, de família judia. Em 1923, converteu-se ao catolicismo e mudou o sobrenome para Tarski - o anti-semitismo era muito forte na época. Foi considerado um dos maiores lógicos do século XX. Faleceu nos EUA, para onde emigrou com o início da Segunda Guerra Mundial, em 27 de outubro de 1983.

[4] Publicada em russo em 1933 e traduzida para o inglês em 1983.

[5] Devido à sua riqueza de expressão, que permitiria auto-referência e internalizar o conceito de verdade, ingredientes que produzem facilmente o paradoxo do mentiroso.

[6] Consulte a obra de Richard L. Kirkham, **Theories of Truth. A Critical Introduction**, The MIT Press, Cambridge, MA, EUA, 1992, especialmente os capítulos 5 e 6.

1.3 Estruturas e Linguagens Formais de Primeira Ordem

Estruturas matemáticas carregam consigo, em geral, elementos distinguidos (por exemplo, o zero, como elemento neutro da soma em $\mathbb{Z}$), operações (a soma e o produto em $\mathbb{Z}$) e relações (por exemplo, a ordem em um conjunto ordenado). É prática comum usarmos os mesmos símbolos (por exemplo, 0, 1, $+$, $<$, etc.) para rotular elementos distinguidos, operações e relações das várias estruturas dentro de uma classe (por exemplo, espaços vetoriais, aneis, corpos ordenados, etc.) Esse conjunto de símbolos será chamado de assinatura daquela classe de estruturas. Mais especificamente, uma **assinatura** é um conjunto $L = C \cup F \cup R$, sendo que C, F e R são conjuntos dois a dois disjuntos, $F = \bigcup_{n\geq 1} F^n$, $R = \bigcup_{n\geq 1} R^n$ e supomos que possamos distinguir se um dado elemento está em C, ou em algum F^n ou em um R^n (por exemplo, os elementos de C podem ser pares ordenados $(0,i)$, $i \in I$, os de F^n triplas ordenadas $(1,n,j)$ $j \in J$ e os de R^n triplas ordenadas $(2,n,k)$, $k \in K$).

Dada uma assinatura L, uma **estrutura** para L (ou L-estrutura) é uma quadrupla $\mathcal{M} = (M, C^M, F^M, R^M)$ em que M é um conjunto não vazio (o **domínio** da estrutura), C^M é uma aplicação de C em M (isto é, a cada símbolo de constante $c \in C$ associamos um elemento $c^M \in M$), F^M é uma associação dos símbolos de função $f \in F$ a funções $f^M : M^n \to M$ (sendo f n-ária) e R^M uma associação dos símbolos de relação $P \in R$ a relações (subconjuntos de M^n, sendo P n-ário) P^M em M.

Devido a um saudável [7] abuso de linguagem, denotaremos a estrutura $\mathcal{M}$ por M, seu conjunto subjacente, quando a interpretação dos símbolos da assinatura estrutura estiver subentendida.

1.3.1 Linguagens de Primeira Ordem

Uma **linguagem de primeira ordem** consiste num alfabeto que contém os símbolos lógicos $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\exists$ e $\forall$, e também o da igualdade, "$=$", será considerado como símbolo lógico; um conjunto enumerável de símbolos de variáveis $\mathrm{Var} = \{x_n : n \in \omega\}$; símbolos não lógicos são os de uma assinatura

[7] Antigamente usava-se o alfabeto gótico para denotar a estrutura: $\mathfrak{M} = (M, \ldots)$.

L; além disso a linguagem tem regras (gramaticais) de formação de expressões bem fundadas, ou fórmulas e sentenças.

Como o que muda de uma linguagem a outra é apenas a assinatura L, usaremos o símbolo L também para denotar a linguagem de primeira ordem assim obtida[8].

Exemplo 1 *A linguagem da teoria dos grupos contém o símbolo "e" de constante (para o elemento neutro) e o símbolo de função binária, "$\cdot$", para a operação do grupo.*

Exemplo 2 *A linguagem da teoria dos aneis contém os símbolos de constantes* 0 *e* 1*, e as operações binárias* $+$ *e* $\cdot$*, com as interpretações usuais.*

Exemplo 3 *A linguagem da teoria dos aneis ordenados contém os símbolos de constantes* 0 *e* 1*, e as operações binárias "$+$" e "$\cdot$", uma relação binária "$\leq$", com as interpretações usuais. Pode também ser usado o símbolo de função unária "$-$" para o oposto de um elemento.*

Para descrever as regras gramaticais, comecemos pelos **termos de** L (ou L-termos, que correspondem às palavras ou locuções da linguagem natural):

Somente serão considerados termos as sequências de símbolos t de L para as quais existe uma sequência finita $t_1, \ldots, t_m$ tal que t é o último elemento da sequência, t_m, e cada t_i deve satisfazer uma das condições abaixo:

- t_i é uma variável, ou
- um símbolo de constante, ou
- t_i é $f(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n})$ sendo que f é um símbolo de função n-ária e $i_1, \ldots, i_n < i$ (isto é, já foram obtidos anteriormente).

Com isto também podemos definir a **complexidade do termo** t, $c(t)$, por $c(t) = 1$, se t for variável ou constante; e $c(f(t_1, \ldots, t_n)) = 1 + c(t_1) + \ldots + c(t_n)$.

[8] Alguns autores usam uma letra grega minúscula, por exemplo, σ, para denotar a assinatura e a notação $L(\sigma)$ para denotar uma lógica – conjunto do regras de formação de fórmulas e de semântica.

Exemplo 4 *Consideremos a assinatura* $L = \{0, 1, +\}$. *Então são termos os símbolos de constante* 0 *e* 1, *os termos compostos* $1+0$, $x_3 + x_5$, $(x_2+0)+1$, *etc. Por exemplo, a construção do termo* $(x_2 + 0) + 1$ *pode ser documentada pela seguinte sequência:*

1. t_1*:* x_2 *– (variável)*
2. t_2*:* 0 *– (constante)*
3. t_3*:* $x_2 + 0$ *– (*$t_1 + t_2$*)*
4. t_4*:* 1 *– (constante)*
5. t_5*:* $(x_2 + 0) + 1$ *– (*$t_3 + t_4$*)*

Neste caso, por inspeção *desta sequência, percebemos que a complexidade daquele termo é* $c(t_5) = 5$.

Agora podemos definir **fórmula de** L (ou L-fórmula).

Somente serão consideradas fórmulas as sequências de símbolos φ de L para as quais existe uma sequência finita $\phi_1, \ldots, \phi_m$ tal que φ é ϕ_m e cada ϕ_i deve satisfazer uma das condições abaixo:

- ϕ_i é $t_1 = t_2$ (ou mais pedantemente, "$= (t_1, t_2)$"), sendo que t_1 e t_2 são termos, ou
- $R(t_1, \ldots, t_n)$, sendo que R é símbolo relacional n-ário e $t_1, \ldots, t_n$ são termos, ou
- $\phi_j \wedge \phi_k$, ou $\phi_j \vee \phi_k$, ou $\neg\phi_j$, ou $\phi_j \to \phi_k$, ou $\phi_j \leftrightarrow \phi_k$, em que $j, k < i$, ou
- $\exists x \phi_k$ or $\forall x \phi_k$, sendo que x é uma variável e $k < i$; neste caso, a fórmula ϕ_k será chamada de *escopo* do quantificador $\forall x$ ou $\exists x$.

As fórmulas do tipo $t_1 = t_2$ e do tipo $R(t_1, \ldots, t_n)$ são chamadas de **fórmulas atômicas**.

Com isto também podemos definir a **complexidade da fórmula** φ $c(\varphi) = 1$ se φ for fórmula atômica; se φ for uma das fórmulas $\phi \wedge \psi$, ou $\phi \vee \psi$, ou $\phi \to \psi$, ou $\phi \leftrightarrow \psi$, então $c(\varphi) = 1 + c(\phi) + c(\psi)$; se φ for uma das fórmulas $\neg\phi$, ou $\exists x\phi$, ou $\forall x\phi$, então $c(\varphi) = 1 + c(\phi)$.

Exemplo 5 *A complexidade da fórmula* $\forall y \exists x(y > 0 \to x^2 \cdot y = 1)$ *é 5.*

Dada uma fórmula φ, definimos como **variáveis livres** as variáveis x que ocorram em φ e que não estejam no escopo de um quantificador $\exists x$ ou $\forall x$.

Mais especificamente, definimos por indução na complexidade de φ o conjunto das variáveis livres de φ, $VL(\varphi)$ como:

- se φ for atômica, $VL(\varphi)$ contém exatamente as variáveis que ocorrem nor termos de φ;
- se φ for $\neg\psi$, então $VL(\varphi) = VL(\psi)$;
- se φ for $\phi_1 \wedge \phi_2$ ou $\phi_1 \vee \phi_2$ então $VL(\varphi) = VL(\phi_1) \cup VL(\phi_2)$;
- por fim, se φ for $\exists x\, \psi$ ou $\forall x\, \psi$ então $VL(\varphi) = VL(\psi) \setminus \{x\}$. Neste caso, x é dita **variável ligada**.

Costuma-se escrever $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ quando $VL(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Uma fórmula φ é uma **sentença** se $VL(\varphi)$ for vazio.

Exercício 1 *Determine o conjunto* $VL(\varphi)$*, sendo que* φ *denota a fórmula:*

1. $0 = 1$
2. $x_2 + 0 = x_4$
3. $\exists x_3(1 = 1)$
4. $\exists x_0(x_0 = 1 \to 1 = x_0)$
5. $(\forall x_0(x_0 \neq x)) \wedge (x_0 = 0)$
6. $(\forall x_1(x_0 \neq x_2)) \wedge (x_1 = 0)$

1.3.2 Interpretação em Estruturas

Vamos definir agora a relação de **satisfação**, $\models$, que relaciona estruturas e fórmulas. Vamos definir esta relação por indução na complexidade das fórmulas. Dadas uma estrutura M, uma **atribuição de valores** $s : \mathrm{Var} \to M$ e uma fórmula φ, definimos $M \models \varphi[s]$ por etapas.

Primeiramente, definiremos **interpretação de termos** em M dada s, $t^M[s]$ (no caso em que a estrutura estiver subentendida, denotaremos apenas $t[s]$) ou apenas $s(t)$, como:

- se t é a constante c, $t^M[s] = c^M$;
- se t é uma variável x, $t^M[s] = s(x)$;
- se t é da forma $f(t_1, \ldots, t_n)$, $t^M[s] = f^M(t_1^M[s], \ldots, t_n[s])$.

Usaremos apenas a notação $s(t)$ no lugar de $t^M[s]$, reservando esta última quando for necessária.

Agora definiremos **interpretação das fórmulas** em M, isto é, a relação $M \models \varphi[s]$ (leia-se M satisfaz φ em s, ou que M é **modelo** de φ):

- se φ é atômica, $P(t_1, \ldots, t_n)$ (incluindo o caso $t_1 = t_2$), $M \models \varphi[s]$ se $(s(t_1), \ldots, s(t_n)) \in P^M$;
- se φ é $\phi_1 \wedge \phi_2$, $M \models \varphi[s]$ se $M \models \phi_1[s]$ e $M \models \phi_2[s]$;
- se φ é $\phi_1 \vee \phi_2$, $M \models \varphi[s]$ se $M \models \phi_1[s]$ ou $M \models \phi_2[s]$;
- se φ é $\neg\phi$, $M \models \varphi[s]$ se não ocorrer que $M \models \phi[s]$ (ou $M \not\models \phi[s]$);
- se φ é $\exists x\phi$, $M \models \varphi[s]$ se existir $a \in M$ tal que se $s' : \mathrm{Var} \to M$ satisfaz $s'(x) = a$ e $s'(y) = s(y)$ para todas as outras variáveis, então $M \models \phi[s']$;
- se φ é $\forall x\phi$, $M \models \varphi[s]$ se para cada $a \in M$, se $s' : \mathrm{Var} \to M$ satisfaz $s'(x) = a$ e $s'(y) = s(y)$ para todas as outras variáveis, então $M \models \phi[s']$

Pelo exercício 25, a relação $M \models \varphi[s]$ só depende das variáveis livres de φ. Neste caso, usando a notação $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ descrita acima, e sendo $a_i = s(x_i)$, podemos escrever a relação $M \models \varphi[s]$ na forma $M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$. No caso das sentenças, denotaremos $M \models \varphi$, omitindo a atribuição de valores s.

1.3.3 Morfismos de L-Estruturas

Um **morfismo** de L-estruturas é uma aplicação $\Phi : M \to N$ tal que se $f \in F$ é n-ária, $\Phi(f^M(x_1, \ldots, x_n)) = f^N(\Phi(x_1), \ldots, \Phi(x_n))$, e se $P \in R$ é n-ária, então $(x_1, \ldots, x_n) \in P^M$ se, e só se, $(\Phi(x_1), \ldots, \Phi(x_n)) \in P^N$. Se Φ é bijetora, dizemos que é um **isomorfismo** (de L-estruturas).

Observe que não restringimos a noção de morfismo dizendo que para todo $c \in C$, $\Phi(c^M) = c^N$. Isso é para admitir situações em que $c_1^M = c_2^M$, mas $c_1^N \neq c_2^N$ (por exemplo, a inclusão do anel trivial $\{0\}$, em que vale $0 = 1$, em outros aneis nos quais vale $0 \neq 1$).

Exercício 2 *Um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais é uma estrutura M com a operação binária (de duas variáveis) de soma $+ : M \times M \to M$ com elemento neutro $0 \in M$, e operações unárias (de uma variável) $m_r : M \to M$ (multiplicação pelo escalar $r \in \mathbb{Q}$), para cada $r \in \mathbb{Q}$. Determine a assinatura apropriada a este exemplo. Mostre que uma transformação linear entre espaços vetoriais é morfismo de estruturas no sentido dado acima.*

Exercício 3 *Seja M o conjunto de todas as sequências finitas de zeros e uns, com elementos distinguidos 0 e 1, e a operação binária de concatenação $s_1 \cdot s_2 = s_3$, sendo que se $s_1 = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle$ e $s_2 = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle$ ($m, n \geq 0$, para permitir também sequências vazias), então $s_3 = \langle x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n \rangle$. Uma codificação de sequências é uma função $F : M \to M$, tal que $F(s_1 \cdot s_2) = F(s_1) \cdot F(s_2)$. Determine a assinatura apropriada a este exemplo. Mostre que F é morfismo de L-estruturas.*

Exercício 4 *Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros e para cada $n > 0$, seja $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Definimos em $\mathbb{Z}_n$ as operações de soma e produto como as usuais de $\mathbb{Z}$, mas tomando como resultado o resto da divisão do número obtido pelo número n. Determine a assinatura apropriada a este exemplo. Mostre que a fun ção $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ definida como $F(x)$ sendo o resto da divisão de x por n é morfismo de L-estruturas.*

Um morfismo de L-estruturas $F : M \to N$ é chamado de monomorfismo elementar[9] se, para toda L-fórmula ϕ e toda $s : \mathrm{Var} \to M$, tais que $M \models \phi[s]$,

[9]Ou apenas morfismo elementar, se acharem o prefixo *mono* é exagero!

então $N \models \phi[F \circ s]$, sendo que $F \circ s : \mathrm{Var} \to N$ indica a composição $F \circ s(x) = F(s(x))$.

Exercício 5 *Mostre que se $F : M \to N$ for monomorfismo elementar de L-estruturas e $N \models \phi[F \circ s]$, então $M \models \phi[s]$.*

Exercício 6 *Mostre que se $F : M_1 \to M_2$ e $G : M_2 \to M_3$ forem monomorfismos elementares de L-estruturas, então sua composição $G \circ F : M_1 \to M_3$ também será monomorfismo elementar.*

Uma caracterização importante (leia-se muito útil) de monomorfismo elementar é o teste de Tarski-Vaught[10].

Teorema 1 ***(Teste de Tarski-Vaught)*** *Seja $F : M \to N$ um morfismo de L-estruturas. Esse morfismo será elementar se, e somente se, para toda fórmula da forma $\exists x\phi$ e toda $s : \mathrm{Var} \to M$, se $N \models \exists x\phi[F \circ s]$, então $M \models \exists x\phi[s]$.*

Demonstração: Como a fórmula $\exists x\phi$ é um tipo particular de fórmula, da definição de monomorfismo elementar, decorre que se F for elementar, então para toda $s : \mathrm{Var} \to M$, se $N \models \exists x\phi[F \circ s]$, então $M \models \exists x\phi[s]$, pois ,caso contrário, $M \models \neg\exists x\phi[s]$ do que decorre que $M \models \forall x\neg\phi[s]$ e, portanto, por ser F elementar, $N \models \neg\exists x\phi[F \circ s]$, uma contradição.

Para a recíproca, que é a parte mais útil deste teorema, suponhamos que para toda fórmula da forma $\exists x\phi$ e toda $s : \mathrm{Var} \to M$, se $N \models \exists x\phi[F \circ s]$, então $M \models \exists x\phi[s]$. Para mostrarmos que F é elementar, faremos uma indução na complexidade da fórmula ϕ, mostrando que se $M \models \phi[s]$ então $N \models \phi[F \circ s]$.

Primeiramente, observemos que se c for um símbolo de constante, então $F(c^M) = c^N$, pois, se $F(c^M) = a \neq c^N$, $N \models \exists x(x = c \wedge y \neq c)[F \circ (s|_{y=c^M})]$ e, portanto, $M \models \exists x(x = c \wedge y \neq c)[s|_{y=c^M}]$, uma contradição.

Usando a fórmula $\exists x(x = t_1 \wedge x \neq t_2)$, com argumento parecido com o acima, demonstramos que se $M \models (t_1 = t_2)[s]$, então $N \models (t_1 = t_2)[F \circ s]$.

[10] A. Tarski, R. Vaught, *Arithmetical Extensions of Relational Systems*, Compositio Math. 13 (1957), 81-102

Usando a fórmula $\exists x(x = t_j \wedge \neg P(t_1, \ldots, t_{j-1}, x, t_{j+1}, \ldots, t_n))$, obtemos que se $M \models P(t_1, \ldots, t_n)[s]$, então $N \models P(t_1, \ldots, t_n)[F \circ s]$.

O passo de indução para as fórmulas da forma $\phi \wedge \psi$, ou $\phi \vee \psi$, $\phi \to \psi$, ou $\phi \leftrightarrow \psi$, ou $\neg\phi$, são tratados de formas similares. Por isso, trataremos apenas do caso em que a fórmula em questão seja $\phi \wedge \psi$, deixando o tratamento dos outros como exercício. A hipótese de indução é que $M \models \theta[s]$ se, e somente se, $N \models \theta[F \circ s]$, para toda fórmula θ de complexidade menor que a da fórmula $\phi \wedge \psi$. Suponhamos, então, que $M \models (\phi \wedge \psi)[s]$. Por definição, $M \models \psi[s]$ e $M \models \psi[s]$. Como ϕ e ψ são fórmulas de menor complexidade, para elas vale a hipótese de indução, o que nos permite concluir que $N \models \phi[F \circ s]$ e $N \models \psi[F \circ s]$. Novamente, pela definição da relação "$\models$", podemos concluir que $N \models (\phi \wedge \psi)[F \circ s]$. A recíproca é tratada similarmente.

Para os casos de quantificação, a hipótese de indução deve ser formulada com mais cuidado: para toda fórmula θ de complexidade menor que $\exists x\phi$ (respectivamente $\forall x\phi$), e *toda atribuição de valores* $s : \mathrm{Var} \to M$, $M \models \phi[s]$ se, e somente se, $N \models \phi[F \circ s]$.

Suponhamos que $M \models \exists x\phi[s]$. Pela definição da relação "$\models$", existe $a \in M$, tal que $M \models \phi[s|_{x=a}]$. Aplicando a hipótese de indução, podemos afirmar que $N \models \phi[F \circ (s|_{x=a})]$, e como $F \circ (s|_{x=a}) = (F \circ s)|_{x=F(a)}$, concluímos que $N \models \phi[(F \circ s)|_{x=F(a)}]$, ou seja, existe um elemento $b = F(a) \in N$, tal que $N \models \phi[(F \circ s)|_{x=b}]$. Pela definição da relação "$\models$", obtemos que $N \models \exists x\phi[F \circ s]$. A recíproca, neste caso, é a hipótese deste Teorema.

Por fim, consideremos o caso em que $M \models \forall x\phi[s]$. Raciocinando por contradição, se $N \not\models \forall x\phi[F \circ s]$, então $N \models \exists x(\neg\phi)[F \circ s]$. Da hipótese do Teorema, segue que $M \models \exists x(\neg\phi)[s]$ e, portanto, $M \not\models \forall x\phi[s]$. Reciprocamente, $M \not\models \forall x\phi[s]$, então $M \models \exists x(\neg\phi)[s]$ e, portanto, $N \models \exists x(\neg\phi)[F \circ s]$, pela argumentação contida no parágrafo acima. $\square$

1.4 Dedução formal

Uma vez que tenhamos dado uma semântica (significado, ou interpretação na metalinguagem), vamos estender a noção de dedução formal do cálculo proposicional para incorporar o tratamento dos novos símbolos introduzidos.

Uma dedução formal deverá ser um esquema gráfico que, de maneira fiel, represente a argumentação “lógica” da matemática. Devemos incorporar regras de manipulação dos símbolos dessa linguagem gráfica que possam ser interpretadas como princípios básicos de argumentação.

Hoje em dia existem diversas maneiras de se fazer isso, das quais destacamos dois métodos gerais. O método da dedução natural, em que descrevemos regras de construção e desconstrução de fórmulas, e o chamado método axiomático, em que as regras estão codificadas em fórmulas específicas (axiomas) e com um mínimo de outras regras.

O resultado obtido a partir desses métodos são equivalentes, não se ganha, nem se perde em usar um ou outro.

Adotaremos neste texto o método axiomático.[11]

A ideia de dedução formal é criar uma sequência finita de fórmulas documentando o raciocínio lógico que, a partir de algumas hipóteses (fórmulas que definem o contexto matemzático), concluiremos outras fórmulas (os teoremas da teoria em questão).

Um requisito importante para que aceitemos a dedução formal é que “verdade” seja preservada, no sentido que as conclusões obtidas das deduções sejam válidas em todo contexto matemático (ou seja, as L-estruturas) nos quais as hipóteses sejam verdadeiras.

Em particular, as fórmulas escolhidas como axiomas deverão ser v’alidas em qualquer contexto (ou em qualquer estrutura e, como admitiremos a possibilidade de fórmulas com variáveis livres, com qualquer atribuição de valores a essas variáveis). Tais fórmulas deverão ser o que chamamos de **validades universais**.

Podemos definir uma dedução de uma fórmula ϕ a partir de um conjunto de fórmulas Γ (as hipóteses ou descrição de uma teoria matemática) como sendo uma sequência (finita[12]) de L-fórmulas $\phi_1, \ldots, \phi_n$, satisfazendo uma das seguintes condições, para $i = 1, \ldots, n$:

[11] Isso por que o autor está mais acostumado com ele!

[12] *Assim, por exemplo, alguns enfatizam a estipulação, como um tipo de condição restritiva, que, se a matemática deva ser rigorosa, somente uma quantidade* finita *de inferências é admissível em uma demonstração – como se alguém tenha tido sucesso em executar uma infinidade delas!* David Hilbert, ***Über das Unendliche*****, Mathematische Annalen**, 95 (1926), pp. 161-190, traduzido para o inglês em **From Frege to Gödel**, editado por Jan van Heijenoort, Hrvard Univ. Press, Cambridge, Mass., 1967, pp. 367-392.

1. ou $\phi_i \in \Gamma$ (listamos uma hipótese a ser usada);

2. ou ϕ_i é uma fórmula de *conteúdo puramente lógico* (ou um *axioma lógico*, que será uma fórmula escolhida de uma lista de validades universais);

3. ou ϕ_i foi obtida de duas fórmulas anteriores da lista, ϕ_j e ϕ_k, digamos que ϕ_j seja a fórmula θ, ϕ_k seja $\theta \to \psi$ e ϕ_i seja ψ (esta é a *Regra do Destacamento*, ou também chamada de ***Modus Ponens***, em que se destaca a *conclusão* ψ de uma implicação $\theta \to \psi$, tendo em mãos essa implicação e sua *premissa* θ).

Isso define uma relação binária entre conjuntos de fórmulas e fórmulas, escrita $\gamma \vdash \phi$, lida como ϕ é deduzível a partir de Γ.

Para conectarmos essa definição puramente sintática e formal com uma noção semântica de validade em L-estruturas, dizemos que φ é **consequência semântica** do conjunto de fórmulas Γ, e denotamos $\Gamma \models \varphi$, se para toda estrutura M e toda atribuição de valores $s : \mathrm{Var} \to M$, se $M \models \Gamma[s]$ (isto é, se $M \models \gamma[s]$, para cada $\gamma \in \Gamma$), então $M \models \varphi[s]$.

Com essa definição, queremos que se ϕ for deduzível fromalmente a partir do conjunto de hipóteses Γ, então que ϕ seja consequência semântica de Γ, $\Gamma \models \phi$.

Observe o uso ambíguo do símbolo $\models$ com dois significados. O seu uso permite distinguir seu significado pretendido: se o que vier à sua esquerda for uma L-estrutura, saberemos que se trata da noção de satisfatibilidade; se for um conjunto (possivelmente vazio) de L-fórmulas, então se trata da noção de consequência semântica.

Observemos algumas asserções triviais, mas muito úteis de se ter em mente:

Exercício 7 *Seja $\phi_1, \ldots, \phi_n$ uma dedução formal (de ϕ_n) a partir de Γ. Mostre que, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\Gamma \vdash \phi_k$. Você deve mostrar que $\phi_1, \ldots, \phi_k$ é uma dedução formal (de ϕ_k) a partir de Γ.*

Exercício 8 *Mostre que se $\Gamma \vdash \phi$, então $\Gamma \cup \Gamma' \vdash \phi$, para qualquer conjunto de fórmulas Γ', com $VL(\Gamma')$ finito.*

Com uma certa antecipação do que virá mais adiante (no capítulo sobre os teoremas da incompetitude), será inviável escolhermos todas as validades universais como axiomas. No entanto, é possível escolher uma família mínima de axiomas que descrevam as propriedades desejadas dos vários símbolos lógicos. Essa escolhas será suficiente para podermos deduzir todas as fórmulas que sejam válidas em todas as L-estruturas (com todas as atribuições de valores ás variáveis livres) em que valham as hipóteses.

Essa última afirmação é o celebrado Teorema da Completitude de Gödel, que será o objetivo principal deste capítulo.

1.5 Os Axiomas

Axiomas são certas fórmulas escolhidas por serem válidas em qualquer estrutura, com qualquer atribuição de valores às variáveis, mas a sua caracterísitica mais importante é que codificam em si regras básicas do raciocínio lógico. A escolha não é única e depende do gosto de cada autor. A escolha feita aqui é a de um conjunto de fórmulas que de certo modo descrevam as propriedades de cada símbolo lógico da linguagem de primeira ordem.

Para isto, precisamos olhar mais de perto as fórmulas de L e separar o que é puramente proposicional de quantificação.

Por uma questão técnica que ficará clara adiante tomaremos não somente as fórmulas listadas, mas as várias generalizações delas.

Uma **generalização** de uma fórmula φ é a fórmula $\forall x_{i_1} \ldots \forall x_{i_n} \varphi$, sendo que $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$ é um conjunto (possivelmente vazio) de variáveis, podendo haver até repetições, ou variáveis que nem ocorram em φ.

1.5.1 Axiomas Proposicionais

Os chamados axiomas proposicionais são aqueles que descrevem o comportamento dos símbolos proposicionais "$\wedge$", "$\vee$", "$\neg$", "$\rightarrow$" e "$\leftrightarrow$".

Axiomas Proposicionais: Todas as generalizações de cada uma das seguintes fórmulas:

1. $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$

2. $(\phi \to (\psi \to \theta)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \theta))$
3. $(\phi \leftrightarrow \psi) \to (\phi \to \psi)$
4. $(\phi \leftrightarrow \psi) \to (\psi \to \phi)$
5. $(\phi \to \psi) \to ((\psi \to \phi) \to (\phi \leftrightarrow \psi))$
6. $(\neg\phi \to \psi) \to ((\neg\phi \to \neg\psi) \to \phi)$
7. $(\phi \wedge \psi) \to \phi$
8. $(\phi \wedge \psi) \to \psi$
9. $(\phi \to \psi) \to ((\phi \to \theta) \to (\phi \to (\psi \wedge \theta)))$
10. $\phi \to (\phi \vee \psi)$
11. $\psi \to (\phi \vee \psi)$
12. $(\phi \to \theta) \to ((\psi \to \theta) \to ((\phi \vee \psi) \to \theta))$
13. $\neg(\phi \wedge \psi) \to (\neg\phi \vee \neg\psi)$

Exercício 9 *Mostre que os axiomas proposicionais são validades universais, isto é, para toda L-estrutura M e toda atribuição de valores às variáveis $s : \mathrm{Var} \to M$, $M \models \phi[s]$, para toda taultologia ϕ.*

Façamos alguns exemplos de deduções formais.

Lema 1 *As seguintes asserções são válidas:*

1. $\phi \to \phi$
2. $(\phi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \phi)$
3. $(\phi \vee \psi) \to (\psi \vee \phi)$
4. $\phi \leftrightarrow \psi \vdash (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$
5. $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi) \vdash \phi \leftrightarrow \psi$

Demonstração: A sequência de fórmulas das deduções serão escritas em coluna, indicando-se ao lado de cada fórmula o que justifica sua presença.

1. Dedução de $(\phi \to \phi)$:

1. $\phi \to ((\phi \to \phi) \to \phi)$ (axioma I-1)
2. $(\phi \to ((\phi \to \phi) \to \phi)) \to ((\phi \to (\phi \to \phi)) \to (\phi \to \phi))$ (axioma I-2)
3. $(\phi \to (\phi \to \phi)) \to (\phi \to \phi)$ (destacamento de 1 e 2)
4. $\phi \to (\phi \to \phi)$ (axioma I-1)
5. $\phi \to \phi$ (destacamento de 3 e 4)

2. Dedução de $(\phi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \phi)$

1. $(\phi \wedge \psi) \to \psi$ (axioma 8)
2. $((\phi \wedge \psi) \to \psi) \to (((\phi \wedge \phi) \to \psi) \to ((\phi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \phi)))$ (axioma 9)
3. $((\phi \wedge \phi) \to \psi) \to ((\phi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \phi))$ (destacamento, com 1 e 2)
4. $((\phi \wedge \phi) \to \phi)$ (axioma 7)
5. $(\phi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \phi)$ (destacamento, com 3 e 4)

3. Dedução de $(\phi \vee \psi) \to (\psi \vee \phi)$

1. $(\phi \to (\psi \vee \phi))$ (axioma 10)
2. $(\phi \to (\psi \vee \phi)) \to (((\psi \to (\psi \vee \phi)) \to ((\phi \vee \psi) \to (\psi \vee \phi)))$ (axioma 12)
3. $((\psi \to (\psi \vee \phi)) \to ((\phi \vee \psi) \to (\psi \vee \phi))$ (destacamento, com 1 e 2)
4. $(\psi \to (\psi \vee \phi))$ (axioma 11)
5. $((\phi \vee \psi) \to (\psi \vee \phi))$ (destacamento, com 3 e 4).

4. Demonstração de que $(\phi \leftrightarrow \psi) \vdash (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$. O conjunto de hipóteses é $\Gamma = \{(\phi \leftrightarrow \psi)\}$. Não usaremos as chaves para não sobrecarregar a notação, mas o que vier do lado esquerdo do símbolo "$\vdash$" deve ser entendido como uma lista dos elementos do conjunto de hipóteses correspondente.

1. $(\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$ (axioma 3)

2. $(\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$ (axioma 4)

3. $((\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)) \rightarrow (((\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)) \rightarrow ((\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)))$ (axioma 9)

4. $(((\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)) \rightarrow ((\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)))$ (destacamento, com 1 e 3)

5. $((\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi))$ (destacamento, com 2 e 4)

6. $(\phi \leftrightarrow \psi)$ (hipótese de Γ)

7. $((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi))$ (destacamento, com 5 e 6)

5. Demonstração de que $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi) \vdash \phi \leftrightarrow \psi$

1. $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$ (hipótese de Γ)

2. $((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$ (axioma 7)

3. $(\phi \rightarrow \psi)$ (destacamento, com 1 e 2)

4. $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \phi) \rightarrow (\phi \leftrightarrow \psi))$ (axioma 5)

5. $((\psi \rightarrow \phi) \rightarrow (\phi \leftrightarrow \psi))$ (destacamento, com 3 e 4)

6. $((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$ (axioma 8)

7. $(\psi \rightarrow \phi)$ (destacamento, com 1 e 6)

8. $(\phi \leftrightarrow \psi)$ (destacamento, com 5 e 7).

Assim, o lema fica demonstrado. $\square$

Um resultado importante, que depende efetivamente apenas dos dois primeiros axiomas é o celebrado Teorema da Dedução de Jacques Herbrand:

1.5.2 O Teorema da Dedução

O próximo teorema é muito importante, pois diz que a implicação codifica de certa maneira a relação de dedução, $\vdash$. Isto é, a noção de dedução formal reflete fielmente a regra de argumentação lógica em que, para demosntrarmos uma asserção da forma "A implica B", assumimos A como hipótese e deduzimos a partir daí, a asserção B.

Teorema 2 ***(Teorema da Dedução)*** *Para qualquer conjunto de axiomas que contenham os dois primeiros axiomas proposicionais, demonstra-se que* $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi$ *se, e só se,* $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$.

Demonstração: Em uma direção, supondo que $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi$, basta acrescentar as fórmulas ϕ (hipótese de $\Gamma \cup \{\psi\}$) e ψ (destacamento) a tal dedução, para mostrarmos que $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$.

Para a recíproca, suponha agora que $\psi_1, \ldots, \psi_n$ seja dedução de ψ a partir de Γ e ϕ, em que não se usa a regra de generalização. Vamos obter por indução na demonstração que $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi_j$, $1 \leq j \leq n$:

- se ψ_i é axioma ou elemento de Γ, a seguinte dedução prova que $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi_i$:

  1. ψ_i (axioma ou hipótese de Γ)
  2. $\psi_i \rightarrow (\phi \rightarrow \psi_i)$ (axioma I-1)
  3. $(\phi \rightarrow \psi_i)$ (destacamento);

- se ψ_i for ϕ, temos a seguinte dedução de $\phi \rightarrow \phi$ (copiada do lema anterior):

  1. $\phi \rightarrow ((\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi)$ (axioma I-1)
  2. $(\phi \rightarrow ((\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi))$ (axioma I-2)
  3. $(\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)$ (destacamento de 1 e 2)
  4. $\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)$ (axioma I-1)
  5. $\phi \rightarrow \phi$ (destacamento de 3 e 4)

- se ψ_i foi obtida por destacamento de ψ_j e ψ_k, $j, k < i$, digamos que ψ_k seja a fórmula $(\psi_j \to \psi_i)$, por hipótese de indução, temos que $\Gamma \vdash \phi \to \psi_j$ e $\Gamma \vdash \phi \to \psi_k$; agregamos e essas deduções as seguintes fórmulas:
    1. $(\phi \to (\psi_j \to \psi_i)) \to ((\phi \to \psi_j) \to (\phi \to \psi_i))$ (axioma I)
    2. $(\phi \to \psi_j) \to (\phi \to \psi_i)$ (destacamento de 1 com $(\phi \to (\psi_j \to \psi_i))$, obtida anteriormente)
    3. $(\phi \to \psi_i)$ (destacamento de 2 com $(\phi \to \psi_j)$, também obtida anteriormente).

Com isso fica provado o teorema. □

Esse teorema também é muito útil para demonstrar que certas fórmulas são dedutíveis, principalmente se envolvem implicações.

Exercício 10 *Usando o Teorema da Dedução, quando necessário, mostre que:*

1. $\vdash (\phi \to \psi) \to ((\psi \to \theta) \to (\phi \to \theta))$
2. $\Gamma, \phi \vdash \psi$ *se, e somente se,* $\Gamma, \neg\psi \vdash \neg\phi$.
3. *Se* $\Gamma, \phi \vdash \psi$ *e* $\Gamma, \neg\phi \vdash \psi$, *então* $\Gamma \vdash \psi$.
4. *Se* $\Gamma \vdash \phi$ *e* $\Gamma \vdash \psi$, *então* $\Gamma \vdash \phi \wedge \psi$.
5. *Se* $\Gamma, \phi \vdash \theta$ *e* $\Gamma, \psi \vdash \theta$, *então* $\Gamma, (\phi \vee \psi) \vdash \theta$.

Exercício 11 *Ache dedução das seguintes fórmulas, usando o Teorema da Dedução, se achar necessário. Podem ser usadas deduções anteriores, mas nunca as posteriores, para evitar argumentos circulares (do tipo, usa A para provar B e B para provar A).*

1. $\vdash (\phi \vee \psi) \to (\psi \vee \phi)$ *(não é preciso usar o Teorema da Dedução aqui)*
2. $\phi \to (\psi \to \theta) \vdash (\phi \wedge \psi) \to \theta$
3. $((\phi \wedge \psi) \to \theta) \vdash (\phi \to (\psi \to \theta))$
4. $(\phi \to \psi) \vdash (\phi \wedge \theta) \to (\psi \wedge \theta)$

5. $(\phi \to \psi) \vdash (\phi \vee \theta) \to (\psi \vee \theta)$
6. $((\neg\phi) \vee \psi) \vdash (\phi \to \psi)$ *(dica: use uma forma conveniente do axioma 12)*
7. $\neg(\phi \vee \psi) \vdash ((\neg\phi) \wedge (\neg\psi))$ *(use o axioma 13 e a propriedade da contrapositiva da implicação)*
8. $((\neg\phi) \vee (\neg\psi)) \vdash \neg(\phi \wedge \psi)$ *(use formas convenientes dos axiomas 7, 8 e 12, além da propriedade contrapositiva da implicação)*
9. $(\psi \wedge (\neg\theta)) \vdash \neg(\psi \to \theta)$
10. $\neg(\psi \to \theta) \vdash (\psi \wedge (\neg\theta))$
11. $\neg(\phi \wedge (\neg\phi))$
12. $\phi \vee (\neg\phi)$

Exercício 12 *Seja Γ, um conjunto de hipóteses. Demonstre as seguintes afirmações:*

1. *Se $\Gamma \vdash \phi$ e $\Gamma \vdash \psi$, então $\Gamma \vdash (\phi \wedge \psi)$.*
2. *Se $\Gamma, \phi \vdash \theta$ e $\Gamma, \psi \vdash \theta$, então $\Gamma, (phi \vee \psi) \vdash \theta$.*
3. *Se $\Gamma, \phi \vdash \psi$ e $\Gamma, (\neg\phi) \vdash \psi$, então $\Gamma \vdash \psi$.*
4. *Se $\Gamma \vdash \psi$, então $\Gamma \vdash (\phi \to \psi)$*
5. *Se $\Gamma \vdash (\neg\phi)$, então $\Gamma \vdash (\phi \to \psi)$.*

Vamos destacar algumas de suas consequências importantes na forma de exercícios.

Exercício 13 *Verifique que as seguintes fórmulas são validades universais. Veremos mais adiante como deduzi-las a partir desses axiomas.*

1. $(\phi \to \psi) \to ((\psi \to \theta) \to (\phi \to \theta))$ *(a propriedade transitiva da implicação)*

2. $(\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)$ *e* $(\neg\psi \to \neg\phi) \to (\phi \to \psi)$ *(a propriedade contrapositiva da implicação)*

3. $(\phi \to (\psi \to \theta)) \to ((\phi \wedge \psi) \to \theta)$

4. $((\phi \wedge \psi) \to \theta) \to (\phi \to (\psi \to \theta))$

5. $(\phi \to \theta) \to ((\phi \to \neg\theta) \to \neg\phi)$

6. $\neg(\phi \wedge \psi) \to (\neg\phi \vee \neg\psi)$

7. $(\neg\phi \wedge \neg\psi) \to \neg(\phi \vee \psi)$

8. $(\phi \leftrightarrow \phi) \to (\phi \to \psi)$

9. $(\phi \leftrightarrow \psi) \to (\psi \to \phi)$

10. $(\phi \to \psi) \to ((\psi \to \phi) \to (\phi \leftrightarrow \psi))$

1.5.3 Axiomas de Quantificação e da Igualdade

Passemos agora ao tratamento da quantificação.

O primeiro problema que encontramos ocorre quando queremos tomar um caso particular de uma fórmula da forma $\forall x\phi$, tirando o quantificador $\forall x$ e trocando x em ϕ por um termo t. Para evitar besteiras do tipo φ é $\forall x\exists y(x \neq y)$, t é a variável y, e a substituição descuidada ficaria $\exists y(y \neq y)$, precisamos definir corretamente este processo.

Comecemos com substituição de um termo em outro.

Dado o termo t e a variável x, definimos a função $t_1 \mapsto t_1|_{x=t}$, por indução na complexidade de t_1:

1. se t_1 for o símbolo de constante c, então $t_1|_{x=t} = c$;
2. se t_1 for a variável x, então $t_1|_{x=t} = t$;
3. se t_1 for uma outra variável que não seja x, então $t_1|_{x=t} = t_1$;
4. se t_1 for o termo $f(t'_1, \ldots, t'_n)$, então $t_1|_{x=t} = f(t'_1|_{x=t}, \ldots, t'_n|_{x=t})$.

Um resultado necessário a seguir é o lema, cuja demonstração (por indução na complexidade do termo t_1) ficará como exercício.

Lema 2 *Dada a L-estrutura M, a atribuição de valores $s : \mathrm{Var} \to M$, os termos t e t_1, e a variável x, temos que $t_1|_{x=t}[s] = t_1[s|_{x=t[s]}]$. Isto é, o valor que o termo alterado $t_1|_{x=t}$ assume com a função s é o mesmo que o termo original t_1 assume com a função alterada $s|_{x=t[s]}$.* $\square$

A **substituição livre** da variável x pelo termo t em ϕ, $S_x^t\phi$ ou $\phi|_{x=t}$, é definida por indução na complexidade de ϕ:

- se ϕ é atômica, $\phi|_{x=t}$ é obtida de ϕ pela substituição de toda ocorrência de x por t;
- se ϕ é $\phi_1 \wedge \phi_2$, $\phi|_{x=t}$ é $\phi_1|_{x=t} \wedge \phi_2|_{x=t}$;
- se ϕ é $\phi_1 \vee \phi_2$, $\phi|_{x=t}$ é $\phi_1|_{x=t} \vee \phi_2|_{x=t}$;
- se ϕ é $\exists y\psi$ (ou $\forall y\psi$) e nenhuma variável em t é y, então $\phi|_{x=t}$ é $\exists y(\psi|_{x=t})$ (ou, respectivamente, $\forall y(\psi|_{x=t})$);
- se ϕ é $\exists y\psi$ (ou $\forall y\psi$), mas y ocorre em t, então $\phi|_{x=t}$ é a prórpia ϕ.

Com isto introduzimos o segundo esquema de axiomas:

Axiomas II: Para cada fórmula ϕ e cada termo t, as generalizações das fórmulas $\forall x\phi \to (\phi|_{x=t})$ e $(\phi|_{x=t}) \to \exists x\phi$.

Como axiomas devem ser validades universais, precisamos verificar se isso ocorre com essas fórmulas. Comecemos com o ponto crucial da demonstração, apresentado em destaque no lema a seguir.

Lema 3 *Sejam ϕ uma fórmula, t um termo, M uma L-estrutura. Seja $b = t[s] \in M$, para toda atribuição de valores $s : \mathrm{Var} \to M$. Então, para toda atribuição de valores $s : \mathrm{Var} \to M$, tal que $M \models \forall x\, \phi[s]$, $M \models \phi[s|_{x=b}]$ se, e somente se, $M \models \phi|_{x=t}[s]$.*

Demonstração: Faremos indução na complexidade de ϕ, começando, é claro, com as fórmulas atômicas.

Suponhamos que A seja a fórmula $(t_1 = t_2)$. Já vimos acima que $t_1|_{x=t}[s] = t_1[s|_{x=t[s]}]$, e como $t[s] = b$, $t_1|_{x=t}[s] = t_1[s|_{x=b}]$. Para t_2, temos o mesmo: $t_2|_{x=t}[s] = t_1[s|_{x=b}]$. Daí fica claro que $M \models \phi[s|_{x=b}]$ se, e somente se, $M \models \phi|_{x=t}[s]$.

O caso em que ϕ seja a fórmula atômica $P(t_1, \ldots, t_n)$, o tratamento é parecido e, por isso, deixado como exercício o seu detalhamento.

Suponhamos que $M \models \phi_j[s|_{x=b}]$ se, e somente se, $M \models \phi_j|_{x=t}[s]$, para $j = 1, 2$ e mostremos que a mesma equivalência valerá para $\phi_1 * \phi_2$, sendo que $*$ pode ser um dos conectivos proposicionais entre "$\wedge$", "$\vee$" ou "$\rightarrow$".

Como são parecidos, trataremos apenas do caso em que $*$ é o conectivo "$\wedge$", deixando os outros como exercício.

Pela definição da relação "$\models$", $M \models (\phi_1 \wedge \phi_2)[s|_{x=t}]$ se, e somente se, $M \models \phi_1[s|_{x=t}]$ e $M \models \phi_2[s|_{x=t}]$. Pela hipótese de indução aplicada em ϕ_1 e em ϕ_2, temos que $M \models \phi_1|_{x=t}[s]$ e $M \models \phi_2|_{x=t}[s]$. Aplicando novamente a definição da relação "$\models$" e também a definição da transformação $\phi|_{x=t}$, concluímos que $M \models (\phi_1 \wedge \phi_2)|_{x=t}[s]$. A implicação recíproca é análoga e será deixada como exercício.

Tratemos agora da quantificação (e aqui é importante que o enunciado preveja que a equivalência a ser provada valha para toda atribuição de valores $s : \mathrm{Var} \rightarrow M$).

Trataremos apenas do caso em que ϕ seja a fórmula $\exists z\, \psi$, deixando o caso em que ϕ seja $\forall z\, \psi$ como exercício, por ter tratamento parecido.

A hipótese de indução é que, *para toda atribuição de valores* $s : \mathrm{Var} \rightarrow M$, *tal que* $M \models \forall x\, \phi[s]$, $M \models \psi[s|_{x=t}]$ se, e somente se, $M \models \psi|_{x=t}[s]$.

Suponhamos que $M \models (\exists z \psi)[s|_{x=t}]$. Se a variável z for a variável x, então $(\exists x\, \psi)|_{x=t}$ é a própria ϕ e, como neste caso a variável x não é livre, temos que $M \models (\exists x \psi)|_{x=t}[s]$.

O caso em que z não seja a variável x e o termo t não contenha a variável z, a hipótese de indução garante o resultado: existe $a \in M$, tal que $M \models \psi|_{x=t}[s|_{z=a}]$, o que é equivalente (pela aludida hipótese de indução) a $M \models \psi[s|_{z=a}|_{x=t[s|_{x=a}]}$.

E, finalmente, o caso em que z não seja a variável x, mas o termo t

contenha a variável z, requer, além da hipótese de indução, aquela que declara "*para toda atribuição de valores* s : Var $\to M$*, tal que* $M \models \forall x\, \phi[s]$", tem que valer a equivalência a ser demonstrada. Suponhamos, então, que $M \models \forall x \phi[s]$. Então $M \models \phi[s|_{x=t[s]}]$. Daí, segue a equivalência que desejávamos demonstrar, aplicando-se a hipótese de indução. $\square$

Com isso, temos o seguinte teorema.

Teorema 3 *Para cada fórmula* ϕ *e cada termo* t*, as fórmulas* $\forall x\, \phi \to (\phi|_{x=t})$ *e* $(\phi|_{x=t}) \to \exists x\, \phi$ *são validades universais.* $\square$

Os próximos axiomas tratam de como distribuir quantificação em implicações.

Axiomas III: Para cada par de fórmulas ϕ e ψ, todas as generalizações de $\forall x(\phi \to \psi) \to (\forall x\phi \to \forall x\psi)$, $(\exists x\phi \wedge \exists x\psi) \to \exists x(\phi \wedge \psi)$.

Axiomas IV: Para cada par de fórmulas ϕ e ψ, e variável x que não seja livre em ϕ, todas as generalizações de $\forall x(\phi \to \psi) \to (\phi \to \forall x\psi)$, $(\phi \wedge \exists x\psi) \to \exists x(\phi \wedge \psi)$.

Axiomas V: Para cada fórmula ϕ e variável x, todas as generalizações de $\forall x\phi \to \neg(\exists x\neg\phi)$ e de $\neg(\exists x\neg\phi) \to \forall x\phi$.

E, por fim, os axiomas da igualdade.

Axiomas VI (Igualdade): As generalizações de $x = y \to y = x$, $x = x$ e, para cada símbolo de relação n-ária P e termos $t_1, \ldots, t_n$, as generalizações de

$$P(t_1, \ldots, t_n) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{k} x_i = y_i\right) \to P(t'_1, \ldots, t'_n),$$

sendo que t'_i é obtido de t_i por zero ou mais substituições de ocorrências das variáveis x_j por y_j.

Exercício 14 *Mostre que os enunciados que foram chamados de axiomas acima são realmente validades universais.*

Um lema simples e útil para uso posterior.

Lema 4 *Suponhamos que c seja um símbolo de constante. Então*

$$\vdash \exists x(x = c).$$

Demonstração:

1. $(\forall x \neg(x = c)) \to (\neg(c = c))$ (axioma II)
2. $(\dots)$ $(c = c) \to (\exists x(x = c))$ (aplicando a contrapositiva da implicação e o axioma V)
3. $\forall x(x = x)$ (axioma da igualdade)
4. $(\forall x(x = x)) \to (c = c)$ (axioma II)
5. $(c = c)$ (destacamento)
6. $\exists x(x = c)$ (destacamento)

1.5.4 A Regra da Generalização

Em alguns textos de Lógica Matemática costuma-se incluir mais uma regra de inferência, a chamada regra da generalização.

Essa regra nada mais é do que o conhecido argumento de que "*como x é arbitrário, (uma dada propriedade) vale para todo x*", e, na verdade, pode ser derivada em nosso[13] sistema, ou seja:

Lema 5 *Se $x \notin VL(\Gamma)$ e $\Gamma \vdash \psi$, então existe dedução de $\forall x\, \psi$ a partir das hipóteses de Γ em que não se usa a regra de generalização, mas apenas a regra do Modus Ponens.*

Demonstração: Sem perda de generalidade (ou por indução na demonstração), podemos supor que $\psi_1, \dots, \psi_n$ é dedução de ψ a partir de Γ em que não se usa a regra de generalização. Vamos obter desta uma dedução de

[13]Na verdade, não é *nosso* no sentido de propriedade, pois o sistema apresentado aqui baseia-se, com certas modificações, no livro de Herbert B. Enderton, *A Mathematical Introducation to Logic*, Academic Press, EUA, 1972.

$\forall x\, \psi$ sem usar a regra de generalização, por indução no tamanho da demonstração. Na verdade, a hipótese de indução é que $\Gamma \vdash \forall x\, \psi_j$, para todo $j < i$, $1 \leq i \leq n$ (sendo que o passo inicial a hipótese é vazia).

Dividimos em três casos:

- se ψ_i é axioma, então $\forall x\, \psi_i$ também é axioma e, portanto, $\Gamma \vdash \forall x\, \psi_i$;
- se $\psi_i \in \Gamma$, então $x \notin VL(\psi_i)$ e temos a seguinte dedução:
    1. ψ_i (listamos uma hipótese de Γ)
    2. $\forall x(\psi_i \to \psi_i)$ (é axioma proposicional)
    3. $\forall x(\psi_i \to \psi_i) \to (\psi_i \to \forall x\, \psi_i)$ (uma forma do axioma IV)
    4. $(\psi_i \to \forall x\, \psi_i)$ (destacamento de 2 e 3)
    5. $\forall x\, \psi_i$ (destacamento de 1 e 4)
- se ψ_i foi obtida por destacamento, existem $j, k < i$, tais que ψ_k é a fórmula $(\psi_j \to \psi_i)$ e, por hipótese de indução, temos que $\Gamma \vdash \forall x \psi_j$ e $\Gamma \vdash \forall x(\psi_j \to \psi_i)$; assim, temos a seguinte dedução, agregada ás deduções da hipótese:
    1. $\forall x(\psi_j \to \psi_i) \to (\forall x \psi_j \to \forall x \psi_i)$ (uma forma do axioma III)
    2. $(\forall x \psi_j \to \forall x \psi_i)$ (destacamento de 1 com $\forall x(\psi_j \to \psi_i)$, obtida anteriormente)
    3. $\forall x \psi_i$ (destacamento de 2 com $\forall x \psi_j$, obtida anteriormente).

Com isto terminamos a demonstração. □

Uma consequência importante e útil disso é o Teorema 4 a ser demonstrado a seguir. Para isso, façamos um resultado preliminar.

Lema 6 *Seja ϕ uma fórmula e y uma variável que não ocorre em ϕ. Então $(\phi|_{x=y})|_{y=x}$ é a própria ϕ.*

Demonstração: Faremos uma indução na complexidade de ϕ.

Para começarmos, precisamos olhar o que acontece com os termos (uma indução na complexidade dos termos).

Se t for um símbolo de constante ou uma variável que não seja nem x e nem y, então $t|_{x=y}$ é t e $t|_{y=x}$ também é t. Se t for a variável x, então $t|_{x=y}$ é o termos y e $(t|_{x=y})|_{y=x}$ é o termo x. A hipótese do lema descarta a possibilidade do termo t ser a variável y. Supondo que $(t_j|_{x=y})|_{y=x}$ seja t_j, para $1 \leq j \leq n$, então $(f(t_1, \ldots, t_n)|_{x=y})|_{y=x}$ é o termo $f((t_1|_{x=y})|_{y=x}, \ldots, (t_n|_{x=y})|_{y=x})$, que, devido á hipótese de indução, é o termo $f(t_1, \ldots, t_n)$.

Agora podemos tratar das fórmulas atômicas $P(t_1, \ldots, t_n)$ (incluindo a igualdade). Temos que $(P(t_1, \ldots, t_n)|_{x=y})|_{y=x}$ é a fórmula $P((t_1|_{x=y})|_{y=x}, \ldots, (t_n|_{x=y})|_{y=x})$, que é a própria $P(t_1, \ldots, t_n)$, devido ao que mostramos para os termos.

Os casos em que a fórmula é obtida de outras mais simples pelo uso dos conectivos proposicionais são fáceis e deixados como exercício.

Tratemos dos casos de quantificação. Se Q representar um dos quantificadores "$\exists$" ou "$\forall$", se ϕ for a fórmula $Q\, z\, \psi$, a hipótese de indução é que $(\psi|_{x=y})|_{y=x}$ seja a fórmulas ψ. Se z for a variável x, então $\phi|_{x=y}$ é a própria ϕ e, devido à hipótese do lema, a variável y continua não ocorrendo em ϕ. Portanto, neste caso, $(\phi|_{x=y})|_{y=x}$ é a própria ϕ.

Se z não for a variável x (por hipótese ela também não pode ser a variável y), então a hipótese de indução declara que a fórmula $(\psi|_{x=y})|_{y=x}$ é a própria ψ. Como $((Q\, z\, \psi)|_{x=y})|_{y=x}$ é a fórmula $Q\, z\, ((\psi|_{x=y})|_{y=x})$, usando a hipótese de indução, concluímos que $(\phi|_{x=y})|_{y=x}$ é a própria ϕ, como desejado. $\square$

Exercício 15 *Mostre que se ϕ for a fórmula $(x = y)$, então $(\phi|_{x=y})|_{y=x}$ não é ϕ. Este exercício contradiz o lema anterior?*

Exercício 16 *Mostre que se a variável y não ocorrer em ϕ e ϕ for um dos axiomas, então $\phi|_{x=y}$ também é um axioma.*

Exercício 17 *Denotemos $\theta|_{c=x}$ a operação de trocar todas as ocorrências de c pela variável x na fórmula θ. Mostre que se θ for um axioma, então $\theta|_{c=x}$ também será um axioma.*

Teorema 4 ***(Eliminação de Constantes)*** *Se o símbolo de constante c não ocorre em nenhuma fórmula de Γ, $x \notin VL(\Gamma)$ e $\Gamma \vdash \psi|_{x=c}$, então $\Gamma \vdash \forall x\, \psi$.*

Demonstração: Mostraremos por indução no comprimento da dedução de $\psi|_{x=c}$ a partir de Γ, que $\Gamma \vdash \forall x\, \psi$.

Seja $\phi_1, \ldots, \phi_n$ uma dedução de ϕ_n a partir de Γ.

Como primeiro passo, seja y uma variável que não ocorra em nenhuma das fórmulas dessa dedução e não ocorra livre em fórmulas de Γ.

A hipótese de indução é que, para todo j, $1 \leq j < i$, $\Gamma \vdash \forall y\, (\phi_j|_{c=y})$. (Ela vale também para o caso $i = 1$.) Consideremos o que acontece com ϕ_i.

Se $\phi_i \in \Gamma$, como $y \notin VL(\Gamma)$, então $\phi_i \rightarrow \forall y \phi_i$ é axioma e

1. ϕ_i – (fórmula de Γ)
2. $\phi_i \rightarrow \forall y \phi_i$ – (axioma)
3. $\forall y \phi_i$ – (destacamento com 1 e 2)

é a dedução desejada.

Se ϕ_i for axioma, então $\phi_i|_{c=y}$ também o será, e $\forall y(\phi_i|_{c=y})$ também será axioma.

Se ϕ_i for obtida por destacamente de ϕ_j (digamos que seja uma fórmula θ) e ϕ_k (digamos, $\theta \rightarrow \phi_i$), com $j, k < i$, a hipótese de indução neste caso será que $\Gamma \vdash \forall y(\theta|_{c=y})$ e $\Gamma \vdash \forall y((\theta \rightarrow \phi_i)|_{c=y})$, ou o que é o mesmo, $\Gamma \vdash \forall y(\theta|_{c=y} \rightarrow \phi_i|_{c=y})$. Daí,

1. $\forall y(\theta|_{c=y} \rightarrow \phi_i|_{c=y}) \rightarrow (\forall y \theta|_{c=y} \rightarrow \forall y \phi_i|_{c=y})$ – (axioma)
2. $\forall y \theta|_{c=y} \rightarrow \forall y \phi_i|_{c=y}$ – (destacamento com 1 e uma hipótese de indução)
3. $\forall y \phi_i|_{c=y}$ – (destacamento com 2 e a outra hipótese de indução)

é a dedução desejada.

Para finalizar, como obtivemos que $\Gamma \vdash \forall y(\psi|_{x=c})|_{c=y}$, temos que

1. $\forall y(\psi|_{x=c})|_{c=y} \rightarrow \psi$ – (axioma: vide exercício)
2. ψ – (destacamento)
3. $\forall x \psi$ – (usando a generalização)

é a dedução que faltava. $\square$

1.5.5 O Teorema da Correção

Mostremos que essa noção de dedução obedece ao primeiro requisito comentado no começo desta seção:*se ϕ for deduzível formalmente a partir do conjunto de hipóteses Γ, então que ϕ seja consequência semântica de Γ, $\Gamma \models \phi$.*

Teorema 5 ***(Teorema da Correção)*** *Se $\Gamma \vdash \phi$ então $\Gamma \models \phi$.*

Demonstração: Faremos uma indução no comprimento da dedução de ϕ. Seja $\phi_1, \ldots, \phi_n$ uma dedução de ϕ a partir de Γ, em que não foi usada a regra de generalização. Vamos mostrar por indução no comprimento da dedução que $\Gamma \models \phi_i$. Seja M uma estrutura e s atribuição de valores, e suponha que $M \models \Gamma[s]$. Se ϕ_i é axioma ou pertence a Γ então trivialmente $\Gamma \models \phi_i$. Se foi obtida por modus ponens, de ϕ_j e ϕ_k com $j, k < i$ então pela hipótese de indução vemos que $M \models \phi_i[s]$, e portanto $\Gamma \models \phi_i$. $\square$

A recíproca deste resultado é bem mais trabalhosa e é o chamado Teorema da Completude.

Exercício 18 *Mostre que se $\Gamma \models \phi$ e x não é variável livre em nenhuma fórmulas de Γ, então $\Gamma \models \forall x\, \phi$.*

1.6 Teoremas da Completitude e da Compacidade

Vamos demonstrar que a dedução formal, como definida neste capítulo também é completa, no sentido de sermos capaz de deduzir todas as consequências semânticas de um conjunto de hipóteses Γ. A peculiaridade desse teorema é que não será apresentado um modo “algorítmico” de se obter uma dedução a partir da informação de que $\Gamma \models \phi$, mas faremos uma demonstração indireta, mostrando a impossibilidade de que não ocorra a existência da dedução formal desejada, ao contrário do que acontece com o cálculo proposicional. O capítulo sobre os Teoremas de Incompletitude de Gödel trará uma justificativa muito forte para essa peculiaridade.

A demonstração do Teorema da Completitude será “indireta”: para mostrarmos que $\Gamma \models \phi$ implica que $\Gamma \vdash \phi$, usaremos a propriedade contrapositiva da implicação contida nessa frase (metamatemática!) e mostraremos que se $\Gamma \nvdash \phi$, então $\Gamma \not\models \phi$, obtendo uma L-estrutura M e uma atribuição de valores $s : \text{Var} \to M$, tal que $M \models \Gamma[s]$, mas $M \models \neg\phi[s]$.

Para obtermos essa L-estrutura, estenderemos o conjunto Γ a um conjunto de L-fórmulas que codificará toda a estrutura M e a atribuição de valores s, e dirá que $\models \Gamma[s]$.

Comecemos, então, a trabalhar nessa direção.

Dizemos que o conjunto Γ é **consistente** se não existir fórmula ϕ tal que $\Gamma \vdash \phi \wedge \neg\phi$.

Teorema 6 *$\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ é consistente se, e só se, $\Gamma \nvdash \phi$.*

Demonstração: Se $\Gamma \vdash \phi$ então $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \phi \wedge \neg\phi$.

Se $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ não for consistente, seja ψ tal que $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \psi \wedge \neg\psi$. Então $\Gamma \vdash \neg\phi \to \psi \wedge \neg\psi$. Como $(\neg\phi \to \psi \wedge \neg\psi) \to \phi$ é tautologia, $\Gamma \vdash \phi$. □

Teorema 7 ***(Teorema da Completitude I)*** *Se $\Gamma \models \phi$ então $\Gamma \vdash \phi$.*

Para provarmos este teorema, provaremos um resultado equivalente.

Teorema 8 *São equivalentes:*

1. *Se $\Gamma \models \phi$ então $\Gamma \vdash \phi$.*

2. *Se Γ é consistente então existe estrutura M e atribuição de valores s tais que $M \models \Gamma[s]$. Neste caso diremos que Γ **tem modelo** ou que M, s **é modelo** de Γ.*

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2): Suponha (1) e que Γ não tenha modelo. Então para qualquer fórmula ϕ, a condição $\Gamma \models \phi$ é vaziamente satisfeita. Por (1), $\Gamma \models \phi$. Em particular se ϕ é $\neg\psi \wedge \psi$. Portanto Γ não é consistente.

(2) $\Rightarrow$ (1): Suponha agora (2) e que $\Gamma \nvdash \phi$. Então $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ é consistente e portanto tem modelo M, s. Mas $M \not\models \phi[s]$ e isto implica que $\Gamma \not\models \phi$. □

Provemos, então este enunciado. O método, introduzido por Leon Henkin em 1949, difere daquele usado originalmente por Kurt Gödel e chama-se o Método das Constantes e mostrou-se bastante útil para a construção de modelos.

Teorema 9 ***(Teorema da Completitude II)*** *Se Γ é consistente então existe estrutura M e atribuição de valores s tais que $M \models \Gamma[s]$.*

Demonstração: Provaremos o caso em que a assinatura L é finita ou enumerável e indicaremos nos exercícios como tratar o caso geral (veja o exercício 28).

Introduzindo novas constantes, se necessário, podemos supor que Γ é um conjunto de L-sentenças.

Seja $D = \{d_n : n < \omega\}$ um conjunto (de novas constantes) disjunto de L e $L(D) = L \cup D$. Enumere o conjunto de todas as $L(D)$-sentenças, $\{\phi_n : n < \omega\}$. Construiremos uma sequência Γ_n de conjuntos consistentes de $L(D)$-sentenças (juntando uma quantidade finita de $L(D)$-sentenças a Γ_0) da seguinte forma:

- seja $\Gamma_0 = \Gamma$;
- suponha construído Γ_n; se $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ for inconsistente, então $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$;
- suponha construído Γ_n; se $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ for consistente e ϕ_n não for existencial (isto é, ϕ_n não é da forma $\exists x\theta$), então $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\phi_n\}$;
- suponha construído Γ_n; se $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ for consistente e ϕ_n for da forma $\exists x\theta$, seja $j_n = \min\{j < \omega : d_j$ não ocorre em nenhuma fórmula de $\Gamma_n\}$ e definimos $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\phi_n, \theta|_{x=d_{j_n}}\}$.

Neste último caso (ϕ_n é $\exists x\theta$), como $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ é consistente, se $\Gamma_n \cup \{\phi_n, \theta|_{x=d_{j_n}}\}$ fosse inconsistente, $\Gamma_n \cup \{\phi_n\} \vdash \neg\theta|_{x=d_{j_n}}$; como d_{j_n} não ocorre em $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$, temos que $\Gamma_n \cup \{\phi_n\} \vdash \forall x\theta$ (pelo Teorema 4) e, portanto, $\Gamma_n \cup \{\phi_n\} \vdash \neg\phi_n$, contradizendo a conssistência de $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$.

Seja $\Gamma_\infty = \bigcup_{n<\omega} \Gamma_n$. Então Γ_∞ é consistente e, para toda $L(D)$-sentença ψ, se $\psi \notin \Gamma_\infty$, então $\neg\psi \in \Gamma_\infty$, pois, se ambas estivessem fora de Γ_∞, não teriam entrado na sua construção. Suponhamos que ψ seja ϕ_m e $\neg\psi$ seja ϕ_n. Podemos supor que $m < n$. Isto significa que $\Gamma_m \cup \{\phi_m\}$ e $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ seriam ambos inconsistentes. Da´
i, decorre que $\Gamma_m \vdash \neg\phi_m$ e, portanto $\Gamma_n \vdash \neg\phi_m$, ou seja, $\Gamma_n \vdash \phi_n$. Como $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ também seria inconsistente, $\Gamma_n \vdash \neg\phi_n$, contradição à consistência de Γ_n.

Definimos a relação $d \sim d'$ em D se a fórmula $(d = d')$ está em Γ_∞. Esta é uma relação de equivalência, pois os axiomas da igualdade estão em Γ_∞. Seja $[d]$ a classe de equivalência de $d \in D$ e M o conjunto dessas classes.

Vamos interpretar $L(D)$ no conjunto M:

- se $d \in D$, $d^M = [d]$;
- se $c \in C$ é símbolo de constante de L, $c^M = [d]$, se a fórmula $(c = d)$ está em Γ_∞; como $\exists x(c = x)$ está em Γ_∞, pelo menos uma das fórmulas do tipo $(c = d)$ está em Γ_∞;
- se $f \in L$ é símbolo de função n-ária, definimos $f^M([d_{i_1}], \ldots, [d_{i_n}]) = [d]$, se a fórmula $f(d_{i_1}, \ldots, d_{i_n}) = d$ estiver em Γ_∞;
- se $P \in L$ for símbolo de relação n-ária, definimos P^M por $([d_{i_1}], \ldots, [d_{i_n}]) \in P^M$ se, e só se, a fórmula $P(d_{i_1}, \ldots, d_{i_n})$ estiver em Γ_∞.

Afirmamos que $M \models \Gamma_\infty$.

Pelo fato dos axiomas da igualdade estarem em Γ_∞ (em alguma forma), as sentenças atômicas de Γ_∞ são satisfeitas em M, como veremos agora.

Dada $s : \mathrm{Var} \to M$ uma atribuição de valores, sejam t e t' dois $L(D)$-termos sem variáveis e suponhamos que a fórmula $(t = t')$ esteja em Γ_∞. Então existem constantes $d, d' \in D$, tais que $(t = d), (t' = d') \in D$. Mostremos que $t[s] = [d]$ e $t'[s] = [d']$, o que faremos por indução na complexidade dos termos. Devido à simetria da argumentação, faremos apenas o caso do termo t.

Se t for um símbolo de constante $\tilde{d} \in D$, então $t[s] = \tilde{d}^M = [\tilde{d}]$. Como $(t = d) \in \Gamma_\infty$, temos que $\tilde{d} \sim d$ e, portanto, $t[s] = [\tilde{d}] = [d]$. Suponhamos agora que t seja o termo $f(t_1, \ldots, t_n)$ e a hipótese de indução é que se $(t_j = d_{i_j}) \in \Gamma_\infty$, então $t_j[s] = [d_{i_j}]$, para $1 \leq j \leq n$ e alguns $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$. Por definição de $t[s]$, $t[s] = f^M(t_1[s], \ldots, t_n[s]) = f^M([d_{i_1}], \ldots, [d_{i_n}])$ e, pela interpretação que demos dos termos de $L(D)$ em M, temos que existe $d_{i_{n+1}} \in D$, tal que $f^M([d_{i_1}], \ldots, [d_{i_n}]) = [d_{i_{n+1}}]$. Isso quer dizer que a fórmula $(f(d_{i_1}, \ldots, d_{i_n}) = d_{i_{n+1}}$ está em Γ_∞. A partir dos axiomas da igualdade (principalmente o de sua transitividade), concluímos que a fórmula $(d_{i_{n+1}} = d)$ também está em Γ_∞, ou seja, $t[s] = [d_{i_{n+1}}] = [d]$.

Se as fórmulas $(t = t')$, $(t = d)$ e $(t' = d')$ estiverem em Γ_∞, então a fórmula $(d = d')$ também estará e, portanto, $t[s] = [d] = [d'] = t'[s]$, ou seja, $M \models (t = t')[s]$, como esperávamos demonstrar.

Agora as hipótese de indução (na complexidade das fórmulas) são $M \models \phi[s]$ se (e somente se) $\phi \in \Gamma_\infty$ e $M \models \psi[s]$ se (e somente se) $\psi \in \Gamma_\infty$.

Se $\phi \wedge \psi \in \Gamma_\infty$, então $\phi \in \Gamma_\infty$ e $\psi \in \Gamma_\infty$. Pela hipótese de indução, $M \models \phi[s]$ e $M \models \psi[s]$. Isso quer dizer que $M \models (\phi \wedge \psi)[s]$.

Os casos de $\phi \vee \psi$, $\phi \to \psi$ e $\phi \leftrightarrow \psi$ são similares e deixados como exercício.

Para o caso da negação, se $\neg\phi \in \Gamma_\infty$, então $\phi \notin \Gamma_\infty$. A hipótese de indução implica que $M \not\models \phi[s]$ e, assim, $M \models (\neg\phi)[s]$.

Para os casos de quantificação, a hipótese de indução é que, *para toda* $s : \mathrm{Var} \to M$, $M \models \psi[s]$ se, e somente se, $\psi \in \Gamma_\infty$. Aqui precisamos ter cuidado, pois se $\forall x\phi \in \Gamma_\infty$ ou $\exists x\phi \in \Gamma_\infty$, nem sempre $\phi \in \Gamma_\infty$, pois essa fórmula pode ter a variável x livre. Entretanto, devido aos axiomas da quantificação e à construção de Γ_∞, se $\forall x\phi \in \Gamma_\infty$, então, para toda $d \in D$, $\phi|_{x=d} \in \Gamma_\infty$, o que significa que $M \models \phi|_{x=d}[s|_{x=[d]}]$, o que equivale a $M \models \phi[s|_{x=[d]}]$, para todo $[d] \in M$. Ou seja, $M \models (\forall x\phi)[s]$. O caso de $\exists x\phi$ é similar e também deixado como exercício.

Assim, por indução na complexidade das fórmulas de Γ_∞, obtivemos que $M \models \Gamma_\infty$ (veja o exercício 27). $\square$

O Teorema de Löwenheim-Skolem

A demonstração do Teorema da Completitude tem uma consequência interessante.

Teorema 10 ***(Löwenheim-Skolem)*** *Suponha que a assinatura L seja finita ou infinita, mas enumerável, e que Γ seja um conjunto de L-sentenças consistente. Então Γ admite um modelo M que seja ou finito, ou infinito e enumerável.* $\square$

Exercício 19 *Seja $L = \{0, 1, +, -, \cdot, \leq\}$ e $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais vistos como L-estrutura com a interpretação usual de L. Seja Γ o conjunto de todas as L-sentenças válidas em $\mathbb{R}$. Mostre que Γ não admite modelos finitos, mas admite modelos enumeráveis.*

O Teorema da Compacidade

Como corolário deste teorema, temos talvez o resultado mais importante da Teoria dos Modelos, devido às suas diversas aplicações.

Teorema 11 ***(Compacidade)*** *Se Γ é um conjunto de sentenças e cada $\Gamma' \subset \Gamma$ finito tem modelo, então Γ tem modelo.* $\square$

Este resultado tem este nome, pois admite uma interpretação topológica (veja o exercício 29).

Um primeiro exemplo de sua aplicação é a existência de modelos *não standard* da aritmética.

Exercício 20 *Seja Γ o conjunto de todas as L-sentenças verdadeiras em $\mathbb{N}$ na lingugem com assinatura $L = \{+, \cdot, 0, 1, \leq\}$, com as suas interpretações ususais. Seja c um símbolo de constante não pertencente a L. Sena $\bar{n}$ o L-termo definido por $\bar{0} = 0$, $\bar{1} = 1$ e para todo $n > 0$, $\overline{n+1} = \bar{n} + 1$. Mostre que o conjunto $\Gamma \cup \{c \neq \bar{n} : n \in \mathbb{N}\}$ é consistente e que, portanto, tem modelo M, necessariamente não isomorfo a $\mathbb{N}$.*

Outra aplicação é que a lógica de primeira ordem não é capaz de capturar ou definir o conceito de *finitude*.

Exercício 21 *Seja Γ um conjunto de sentenças. Mostre que se Γ admitir modelos finitos de tamanhos arbitrariamente grandes, então admitirá modelos infinitos.*

Uma outra aplicação importante é o Teorema da Omissão de Tipos, que será objeto da próxima sessão.

1.6.1 Comentários sobre o Aspecto Computacional

Na Teoria dos Conjuntos, podemos desenvolver a Teoria das Funções Recursivas [14], considerada como o contexto natural dos problemas computacionais

[14] Veja o próximo capítulo.

(ou construtivos), usando todos os axiomas, com a exceção do Axioma da Escolha. O conjunto de tais axiomas (sem o da escolha) é conhecido pela sigla [15] ZF.

Seja TC o enunciado do Teorema da Compacidade (que pode ser formalizado na linguagem de ZF). Leon Henkin demonstrou [16] que, supondo ZF, TC é equivalente ao chamado TIP (Teorema do Ideal Primo) [17], um resultado que afirma a existência de um determinado conjunto em certas situações. Posteriormente, A. R. D. Mathias demonstrou [18] que o TIP não é demonstrável e nem refutável, assumindo ZF e que esta teoria é consistente. Assim sendo, não é possível demonstrar o Teorema da Compacidade, em toda sua generalidade, de modo algorítmico. Na verdade, Alonzo Church [19] demonstrou que o problema geral de decidir algoritmicamente se uma dada fórmula A é dedutível de um conjunto de hipóteses Γ é insolúvel, ou seja, não temos como decidir se uma fórmula A é válida, por exemplo. No entanto, para alguns conjuntos Γ, esse problema é solúvel, como, por exemplo, se Γ for a Teoria dos Corpos Algebricamente Fechado [20]

1.7 Omissão de Tipos

O método das constantes permite provar um teorema útil na classificação de alguns modelos, que é o Teorema da Omissão de Tipos.

Um n-tipo (ou simplesmente tipo) é um conjunto maximal consistente $\Gamma = \Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ de L-fórmulas, cujas variáveis livres (se houver) estão con-

[15] Tirada das iniciais dos sobrenomes de Ernst Zermelo e de Abraham A. Fraenkel, que desenvolveram tal teoria - muito embora a forma usada hoje em dia é a de Thoralf Skolem. Consultem a obra *From Frege to Gödel*, de Jan van Heijenoort, páginas 290 a 301.

[16] Em *Mathematical Theorems Equivalent to the Prime Ideal Theorem for Boolean Algebras*, Bulletin of the American Mathematical Society, 60 (1954), p. 388.

[17] Veja este e outros resultados conexos no livro de Thomas J. Jech, *The Axioma of Choice*, (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 75), North-Holland Publishing Company, Amsterdã, 1973, principalmenteseções 2.3 e 7.2.

[18] Em *The order extension principle.* **Axiomatic Set Theory** (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part II, Univ. California, Los Angeles, Calif., 1967), pp. 179-183. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1974.

[19] Em *A Note on the Entscheidungsproblem*, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 1, No. 1, pp. 40-41.

[20] Demonstrado por Alfred Tarski, em **A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry**. RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1948.

tidas no conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$, para $n \geq 0$ (no caso $n = 0$, não há fórmulas com variáveis livres, mas apenas sentenças). Sejam $S_n(L)$ os conjuntos do todos os n-tipos de L-fórmulas, $n \geq 0$. Se a assinatura for conhecida no contexto em que usamos $S_n(L)$, poderemos omiti-la da notação, escrevendo apenas S_n . Se $T \in S_0(L)$ é dada, denotaremos $S_n(T) = \{\Gamma \in S_n(L) : T \subseteq \Gamma\}$.

Sejam $T \in S_0(L)$ e $M \models T$. Dizemos que M realiza o tipo $\Gamma \in S_n(T)$ se existe $\bar{a} \in M^n$, tal que $M \models \varphi(\bar{a})$, para toda $\varphi \in \Gamma$. Caso contrário, dizemos que M omite Γ.

Lema 7 *Dados $M \models T$ e $\Gamma \in S_n(T)$, então cada $\Gamma \in S_n(T)$ é finitamente satisfatível em M, ou seja, para cada parte finita $\Gamma_0 \subset \Gamma$, existe $\bar{a} \in M^n$, tal que $M \models \Gamma_0(\bar{a})$.*

Demonstração: Como Γ é consistente e contém T, dado $\Gamma_0 \subset \Gamma$ finito, definindo $\varphi = \bigwedge \Gamma_0$ (a conjunção das fórmulas de Γ_0), $T \cup \{\varphi\}$ é consistente e, portanto, $T \cup \{\exists x_1 \ldots \exists x_n \, \varphi\}$ também é consistente. Como $M \models T$ e T é maximal consistente, $M \models \exists x_1 \ldots \exists x_n \, \varphi$. Seja, então, $\bar{a} \in M^n$, tal que $M \models \varphi(\bar{a})$. $\square$

Lema 8 *Dados T e $\Gamma \in S_n(T)$, existe $M \models T$ que realiza Γ. E mais ainda, existe $M \models T$ que realiza todos os n-tipos de $S_n(T)$, para todo $n \geq 1$.*

Demonstração: Para cada $n \geq 1$ e cada $\Gamma \in S_n(T)$ seja $C_\Gamma = \{c_1^\Gamma, \ldots, c_n^\Gamma\}$ um novo conjunto de símbolos de constantes e sejam Γ^* os conjuntos de fórmulas obtidos de Γ pela substituição de cada variável livre x_j pelo símbolo c_j^Γ, $1 \leq j \leq n$. Então $\bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{\Gamma \in S_n(T)} \Gamma^*$ é um conjunto consistente de sentenças na linguagem extendida pelas novas constantes (por compacidade) e, portanto tem modelo. As interpretações das novas constantes realizarão os diversos tipos. $\square$

Dados $T \in S_0$ e $\Gamma \in S_n(T)$, dizemos que a fórmula φ isola Γ, ou que Γ é isolado por φ, se $T \vdash \varphi \to \psi$. Dizemos que Γ é tipo não isolado.

Lema 9 *Se $\Gamma \in S_n(T)$ é isolado (por φ), então todo $M \models T$ realiza Γ.*

Demonstração: Exercício. $\square$

Para tipos não isolados, temos o seguinte teorema (que pode ser generalizado: veja o exercício 30 adiante).

Teorema 12 ***(Omissão de Tipos)*** *Suponha que a assinatura L é finita ou (infinita) enumerável. Dada T e dado $\Gamma \in S_n(T)$, um tipo não isolado, existe $M \models T$ que omite Γ.*

Demonstração: Seja $D = \{d_j : j \in \mathbb{N}\}$ um conjunto de novas constantes e $L(D) = L \cup D$ a assinatura L estendida com D. Enumere as $L(D)$-sentenças $\{\psi_j : j \in \mathbb{N}\}$ e enumere as n-uplas de D, $D^n = \{\bar{d}_j : j \in \mathbb{N}\}$.

Construiremos um conjunto maximal consistente Γ_∞, como no caso do Teorema da Completude, mas imporemos mais uma cláusula para garantir que o modelo construído não realize o tipo Γ.

Inicialmente façamos $\Gamma_0 = T$. Por indução em n construiremos um conjunto de $L(D)$-fórmulas Γ_{n+1} contendo Γ_n, que seja consistente e satisfazendo os quesitos:

- se $\Gamma_n \cup \{\psi_n\}$ for inconsistente, $\Gamma'_n = \Gamma_n$;
- se $\Gamma_n \cup \{\psi_n\}$ for consistente e ϕ_n não for da forma $\exists x\psi$, então $\Gamma'_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\psi_n\}$;
- se $\Gamma_n \cup \{\psi_n\}$ for consistente e ϕ_n for da forma $\exists x\theta$, seja $d \in D$ a primeira constante na enumeração dada que não ocorre em nenhuma fórmula de $\Gamma_n \cup \{\psi_n\}$, e façamos $\Gamma'_n = \Gamma_n \cup \{\psi_n, \theta|_{x=d}\}$. Este conjunto é consistente, pois senão $\Gamma_n \cup \{\psi_n\} \vdash \neg\psi|_{x=c}$ e, portanto, $\Gamma_n \cup \{\psi_n\} \vdash \forall x(\neg\theta)$ o que implica que $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ seria inconsistente, uma contradição.
- Uma vez obtido Γ'_n, temos que impor a não realização do tipo Γ, ou seja, imporemos que a n-upla $\bar{d}_n$ não realize o tipo. Como o tipo é não isolado, existe $\sigma \in \Gamma$, tal que $\Gamma'_n \cup \{\neg\sigma(\bar{d}_n)\}$ é consistente, pois senão $\Gamma'_n \vdash \theta(\bar{d}_n)$, para toda $\theta \in \Gamma$, e, neste caso, se φ for a conjunção de todas as fórmulas de $\Gamma' \setminus T$, retirando as constantes novas e colocando as variáveis livres correspondentes, (ou se for uma fórmula de T se $\Gamma' \setminus T = \varnothing$), então, pelo teorema da dedução, $T \vdash \varphi \to \theta$, para toda $\theta \in \Gamma$, ou seja, φ isolaria Γ, uma contradição. Assim, definimos $\Gamma_{n+1} = \Gamma'_n \cup \{\sigma(\bar{d}_n)\}$.

Fazendo $\Gamma_\infty = \bigcup_n \Gamma_n$, e construindo o modelo M pelo método das constantes, ele omitirá Γ, devido às condições que impõem que nenhuma n-upla de D realizaria Γ. $\square$

Vamos fazer algumas aplicações desse resultado importante. Na verdade, usaremos sua versão generalizada, que permite omitir uma sequência Γ_j, $j \in \mathbb{N}$, de n_j-tipos (veja o exercício 30).

Primeiramente, chamamos uma teoria $T \in S_0(L)$ de **ω-categórica** se T tem modelos enumeráveis e todos esses modelos são isomorfos entre si.

Lema 10 *Suponha que a assinatura L é finita ou enumerável e que existam infinitos tipos distintos em $S_n(T)$. Então existe um tipo $\Gamma_\infty in S_n(T)$ não isolado.*

Demonstração: Suponha que todos os tipos de $S_n(T)$ sejam isolados. Como L é finita ou enumerável, existem no máximo uma quantidade enumeraável de tipos em $S_n(T)$, Γ_j, $j \in \mathbb{N}$. Suponha que $\varphi_j(x_1, \ldots, x_n)$ isole o tipo Γ_j, ou seja, $T \cup \{\varphi\}$ é consistente e $T \vdash \varphi_j \to \psi$, para toda $\psi \in \Gamma_j$. Em particular, como Γ_j é maximal consistente, $\varphi_i \in \Gamma_j$. Podemos ainda afirmar que se $k \neq j$, então φ_j não é consistente com Γ_k, pois existe $\psi \in \Gamma_j$, tal que $\neg\psi \in \Gamma_k$. Seja $\Delta = \{\neg\varphi_j : j \in \mathbb{N}\}$. Então Δ é consistente com T, pois, senão, $T \cup \{\neg\varphi_0, \ldots, \neg\varphi_N\}$ seria inconsistente, para algum $N \in \mathbb{N}$, $N > 0$, por compacidade, ou seja, $T \cup \{\bigwedge_{j=0}^N \neg\varphi_j\}$ seria inconsistente, o que implicaria que $T \vdash \neg \bigwedge_{j=0}^N \neg\varphi_j$, ou seja, $T \vdash \bigwedge_{j=0} N\varphi_j$. Isso implica, em particular, que $\bigwedge_{j=0} N\varphi_j \in \Gamma_{N+1}$ e, portanto, $\varphi_k \in \Gamma_{N+1}$, para algum K, $0 \leq k \leq N$ pois o conjunto Γ_{N+1} é maximal consistente e contém T. Mas isto contradiz o fato observado acima, que se $k \neq j$, então φ_j não é consistente com Γ_k. Ou seja, qualquer lista enumerável de tipos isolados não pode esgotar todo $S_n(T)$ e, portanto, existe um tipo não isolado em $S_n(T)$. $\square$

Na verdade, a hipótese de que L seja finita ou enumerável não é essencial nesse lema. Basta que $S_n(T)$ seja infinito para que contenha um tipo não isolado (faça isso como exercício).

Lema 11 *Se $S_n(T)$ for finito, então todos os seus n-tipos são isolados.*

Demonstração: Se houver um único tipo $\Gamma \in S_n(T)$, então $T \vdash \psi$, para toda $\psi \in \Gamma$ e, portanto $T \vdash \bigwedge_{j=1} n(x_j = x_j) \to \psi$, para toda $\psi \in \Gamma$. Se houver mais de um n-tipo, digamos $S_n(T) = \{\Gamma_0, \ldots, \Gamma_N\}$, para algum $N > 0$, existiriam fórmulas $\psi_j \in \Gamma_j \setminus \bigcup_{j \neq i,\ 0 \leq i \leq N} \Gamma_i$. Tais fórmulas isolam seus tipos. $\square$

Teorema 13 *Seja L finita ou enumerável e $T \in S_0(L)$ uma teoria que tem modelos infinitos. Então T é ω-categórica se, e somente se, $S_n(T)$ é finito, para cada $n > 0$.*

Demonstração: Se algum $S_n(T)$ fosse infinito, teríamos pelo menos dois modelos enumeráveis de T, M_1 e M_2 e um tipo não isolado $\Gamma \in S_n(T)$ omitido em M_1 e realizado em M_2. Tais modelos não podem ser isomorfos, pois se fossem, a (pré-)imagem de n-upla que realizasse o tipo em M_2 necessariamente teria que realizá-lo em M_1.

Por outro lado, se todos os $S_n(T)$ fossem finitos, todos os tipos seriam isolados e, se M_1 e M_2 são dois modelos enumeráveis de T, ambos teriam que realizar todos os tipos sobre T. Enumerando-os, $M_1 = \{a_j : j \in \mathbb{N}\}$ e $M_2 = \{b_j : j \in \mathbb{N}\}$, construímos um isomorfismo entre os dois modelos pelos método de vai-e-vem:

- seja $j_0 = \min\{j \in \mathbb{N} : b_j \text{ realiza } \mathrm{tp}^{M_1}(a_0)\}$, sendo que $\mathrm{tp}^{M_1}(a)$ é o tipo de a em M_1, ou seja, o conjunto de fórmulas $\psi(x_1)$, tais que $M_1 \models \psi(a)$; definimos $f(a_0) = b_{j_0}$;

- seja, agora, $j_1 = \min(\mathbb{N} \setminus \{j_0\})$ e seja $i_1 = \min\{i \in \mathbb{N} : a_i \text{ realiza } \mathrm{tp}^{M_2}(b_{j_0}, b_{j_1})\}$, e definimos $f(a_{i_1}) = b_{j_1}$;

- suponha que já tenhamos definido $f : \{a_0, a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\} \mapsto \{b_{j_0} \ldots, b_{j_k}\}$, para k ímpar; seja $i_{k+1} = \min(\mathbb{N} \setminus \{0, i_1, \ldots, i_k\})$ e seja $j_{k+1} = \min\{j \in \mathbb{N} : b_j \text{ realiza } \mathrm{tp}^{M_1}(a_0, a_{i_1}, \ldots, a_{i_{k+1}})\}$, e defina $f(a_{i_{k+1}}) = b_{j_{k+1}}$; seja $j_{k+2} = \min(\mathbb{N} \setminus \{j_0, j_1, \ldots, j_{k+1}\})$ e seja $i_{k+2} = \min\{i \in \mathbb{N} : a_i \text{ realiza } \mathrm{tp}^{M_1}(b_{j_0}, b_{j_1}, \ldots, b_{j_{k+2}})\}$, e defina $f(a_{i_{k+2}}) = b_{j_{k+2}}$.

Com isto construímos um isomorfismo $f : M_1 \to M_2$, provando que todos os modelos enumeráveis de T são isomorfos. $\square$

1.8 Mais Exercícios

Exercício 22 *Uma medida de complexidade de um termo t, $c'(t)$, pode ser definida por recursão, assim: se t é uma variável ou constante, $c'(t) = 1$ e se t é $f(s_{i_1}, \ldots, s_{i_n})$, então $c'(t) = 1 + \max\ \{c'(t_1), \ldots, c'(t_n)\}$. Mostre que $c(t)$*

e $c'(t)$ são compatíveis, isto é, que $c(t_1) \leq c(t_2)$ se, e só se, $c'(t_1) \leq c'(t_2)$. (Portanto será usada no texto a medida mais conveniente conforme o caso, sem menção explícita.)

Exercício 23 *Outra medida de complexidade de um termo é contar o número de símbolos de constates, de variáveis e de funções usados em sua construção. Por recursão em construções de termos, definimos $c_s(t)$ para o termo t da seguinte forma:*

1. *se t for uma variável ou um símbolo de constante, então $c_s(t) = 1$;*
2. *se já foram definidos $c_s(t_1)$, ..., $c_s(t_n)$, e se $f \in F_n$ for síbolo de função n-ária, então definimos $c_s(f(t_1, \ldots, t_n)) = 1 + \sum_{i=1}^{n} c_s(t_i)$.*

Mostre que $c_s(t)$ conincide com a quantidade de símbolos de constantes, variáveis e funções presentes no termo t. Mostre que c e c_s são compatíveis (veja o exercício anterior).

Exercício 24 *O mesmo que o exercício anterior mas para fórmulas.*

Exercício 25 *Mostre que a relação $M \models \varphi[s]$ só depende das variáveis livres de φ, isto é, se $s'(y) = s(y)$, $y \in VL(\varphi)$, então $M \models \varphi[s']$.*

Exercício 26 *Mostre que se $\Phi : M \to N$ é morfismo, então se φ for atômica ou negação de atômica, então $M \models \varphi[s]$ se, e só se, $N \models \varphi[\Phi \circ s]$.*

Exercício 27 *Preencha os detalhes da demonstração de que a estrutura M é modelo de Γ_∞ no Teorema da Completude.*

Exercício 28 *Mostre que se Γ é consistente, então tem modelo, no caso em que a assinatura L seja não enumerável. [Sugestão: seja $\kappa > \omega$ o cardinal de L; seja $D = \{d_\alpha : \alpha < \kappa\}$ um conjunto de κ novas constantes; enumere as $L(D)$-sentenças por $\{\phi_\alpha : \alpha < \kappa\}$ e construa $\Gamma_0 = \Gamma$, $\Gamma_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \Gamma_\alpha$, se λ for ordinal limite, e $\Gamma_{\alpha+1}$ como no caso enumerável.]*

Exercício 29 *Para cada $n \geq 0$ e cada ϕ, com $VL(\phi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, sejam $U_\phi = \{\Gamma \in S_n(L) : \phi \in \Gamma$. Estes conjuntos formam uma base de uma topologia de $S_n(L)$ totalmente desconexa e compacta, ou seja, mostre que:*

1. *o conjunto de tais U_ϕ é fechado por uniões e interseções finitas e também por complementos; como o complemento de um aberto é fechado, tais conjuntos são, ao mesmo tempo, abertos e fechados;*

2. *os conjuntos abertos de $S_n(L)$ são as uniões arbitrárias desses conjuntos; a topologia de $S_n(L)$ é o conjunto τ de todos os conjuntos abertos;*

3. *essa topologia é Hausdorff, ou seja, dados $\Gamma_1, \Gamma_2 \in S_n(L)$ distintos, existem $U, V \in \tau$ disjuntos, tais que $\Gamma_1 \in U$ e $\Gamma_2 \in V$;*

4. *essa topologia é compacta, ou seja, se F_i, $i \in I$, for uma família de conjuntos fechados (complementos de abertos) em $S_n(L)$, tal que $\bigcap_{i\in I} F_i = \varnothing$, então existe $I_0 \subseteq I$ finito, tal que $\bigcap_{i\in I_0} F_i = \varnothing$.*

Exercício 30 *O objetivo deste exercício é provar esta versão mais geral do*

> ***Teorema da Omissão de Tipos:*** *Suponha que a assinatura L é finita ou (infinita) enumerável. Dado conjunto consistente de sentenças (não necessariamente maximal) T e dados $\Gamma_j \in S_{n_j}(T)$ tipos não isolados $j \in \mathbb{N}$, existe $M \models T$ que omite todos esses tipos.*

*Para isto, resolva os itens a seguir. No que se segue, $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ e $D_n = \{a_{m,n} : m \in \mathbb{N}\}$, conjunto de novas constantes a serem juntadas à assinatura L, obtendo-se a assinatura $L(D) = L \cup D$ (com $D \cap L = \varnothing$). Uma **enumeração de Henkin** (de $L(D)$-sentenças) é um conjunto maximal consistente de $L(D)$-sentenças X, tal que se $\phi \in X$ é uma $L(D_k)$-fórmula tendo x como única variável livre, então existe $a \in D_{k+1}$ tal que $\phi|_{x=a} \in X$. Seja $H(T)$ o conjunto de todas as enumerações de Henkin (contendo T), como descritas acima.*

1. *Mostre que $H(T)$ é subconjunto fechado e não vazio de $S_0^{L(D)}(T)$ (o conjunto de todas as $\Gamma \in S_0(L(D))$ maximais consistentes).*

2. *Mostre que se $\Gamma \in S_n^L(T)$ é um tipo não isolado, então $F(\Gamma) = H(T) \cap \bigcap_{\phi\in\Gamma} U_\phi$ é um fechado de $H(T)$ de interior vazio (ou seja, não existe nenhuma $L(D)$-sentença ψ, tal que $U_\psi \subseteq F$).*

3. *Usando o fato de que todo espaço compacto tem a propriedade de Baire (ou seja, união enumerável de fechados com interior vazio tem interior vazio), mostre que dados tipos* $\Gamma_j \in S^L_{n_j}(T)$*,* $j \in \mathbb{N}$*, não isolados, então existe* $\Delta \in H(T) \setminus \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \bigcap_{\phi\in\Gamma_j} U_\phi$

4. *Mostre que o modelo obtido pelo método das constantes correspondente a* Δ *omite cada tipo* Γ_j*,* $j \in \mathbb{N}$*.*

Exercício 31 *Dado conjunto maximal consistente* T *de* L*-sentenças,* L *finita ou enumerável e seja* $S(T) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n(T)$ *(observe que* $S_0(T) = \{T\}$*).*

1. *Mostre que* $S(T)$ *é enumerável se, e só se, os tipos isolados de cada* $S_n(T)$ *são densos em* $S_n(T)$*,* $n \geq 1$*, ou seja, para cada* ϕ *existe um tipo isolado em* U_ϕ*. [Observe-se que, por serem espaços compactos, cada* $S_n(T)$ *só pode ter no máximo uma quantidade enumerável de tipos isolados. Mostre que se os tipos isolados não são densos em algum* $S_n(T)$*, então existem* $2^{\aleph_0}$ *tipos não isolados: para isto, construa uma árvore binária de abertos* U_ϕ*, indexando as* ϕ *com sequências binárias finitas, começando co uma* $\phi_\varnothing$*, tal que* $U_{\phi_\varnothing}$ *não contenha nenhum tipo isolado e mostre que existe* $\phi_{\langle 0\rangle}$ *tal que, se* $\phi_{\langle 1\rangle}$ *for a fórmula* $\neg\phi_{\langle 0\rangle}$*, então* $\varnothing \neq U_{\phi_{\langle 0\rangle}} \subset U_\varnothing$ *e* $\varnothing \neq U_{\phi_{\langle 1\rangle}} \subset U_\varnothing$*, etc.]*

2. *Mostre que se* $S(T)$ *é enumerável e* $M \models T$ *é modelos enumerável, então dado* $A \subseteq M$*,* $S^{L(A)}(T_{L(A)}(M))$ *também é enumerável, sendo que* $T_{L(A)}(M)$ *é a* $L(A)$*-teoria de* M*, ou seja, o conjunto de todas as* $L(A)$*-sentenças verdadeiras em* M*.*