Terceira Lista Exercícios de Cálculo I - POLI - 2002

I - Integrais Indefinidas

Calcule as integrais indefinidas abaixo. Para a verificação da resposta lembre-se de que

$$\int f(x)dx = F(x) + k \ \ (k \text{ constante }) \ \Leftrightarrow \ F'(x) = f(x), \ \forall x \in D_f.$$

1. $\int \dfrac{x^7 + x^2 + 1}{x^2}\, dx$
2. $\int e^{2x}\, dx$
3. $\int \cos 7x \ dx$
4. $\int tg^2\, x \ dx$
5. $\int \frac{7}{x-2}\, dx$
6. $\int tg^3 x \sec^2 x \ dx$
7. $\int \dfrac{\text{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}\, dx$
8. $\int tg\, x \ dx$
9. $\int tg^3 x \ dx$
10. $\int \dfrac{x}{1+x^2}\, dx$
11. $\int \dfrac{x}{1+x^4}\, dx$
12. $\int \dfrac{x^2}{1+x^2}\, dx$
13. $\int x\, \sqrt{1-x^2}\, dx$
14. $\int sec x \ dx$
15. $\int \dfrac{1}{x\,\sqrt{1+\ln x}}\, dx$
16. $\int x^2\, \sqrt[5]{x^3+1}\, dx$
17. $\int \dfrac{4x+8}{2x^2+8x+20}\, dx$
18. $\int \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx$
19. $\int \dfrac{dx}{(arc\text{sen} x) \ \sqrt{1-x^2}}$
20. $\int \dfrac{e^x}{1+e^x}\, dx$
21. $\int \dfrac{\text{sen} 2x}{1+\cos^2 x}\, dx$
22. $\int e^{x^3} x^2\, dx$
23. $\int e^x\, \sqrt[3]{1+e^x}\, dx$
24. $\int \dfrac{\text{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$
25. $\int \dfrac{e^{arctg\, x}}{1+x^2}\, dx$
26. $\int 2x(x+1)^{2002}\, dx$
27. $\int x\, \text{sen} x \ dx$
28. $\int e^x \cos x \ dx$
29. $\int x \ \ln x \ dx$
30. $\int \ln x \ dx$
31. $\int x e^{-x}\, dx$
32. $\int x arctg\, x \ dx$
33. $\int arc\text{sen} x \ dx$
34. $\int \sec^3 x \ dx$
35. $\int \cos^2 x\, dx$
36. $\int \text{sen}^2 x \cos^3 x \ dx$
37. $\int \text{sen}^2 x \cos^2 x \ dx$
38. $\int \dfrac{1-\text{sen} x}{\cos x}\, dx$
39. $\int \dfrac{3x^2+4x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)}\, dx$
40. $\int \dfrac{1}{2x^2+8x+20}\, dx$
41. $\int \dfrac{3x^2+4x+5}{(x-1)^2(x-2)}\, dx$
42. $\int \dfrac{x^5+x+1}{x^3-8}\, dx$
43. $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$
44. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\, dx$
45. $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$
46. $\int \ln(x + \ \sqrt{1+x^2})\, dx$
47. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$
48. $\int \sqrt{x} \ \ln x \ dx$
49. $\int \text{sen}(\ln x)\, dx$
50. $\int \dfrac{x}{x^2-4}\, dx$
51. $\int \dfrac{3x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3}\, dx$
52. $\int \sqrt{a^2+b^2x^2}\, dx$
53. $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}\, dx$
54. $\int \sqrt{x^2-2x+2}\, dx$
55. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx$
56. $\int \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\, dx$
57. $\int \cos^3 x\, dx$

58. $\int \operatorname{sen}^5 x \; dx$

59. $\int \dfrac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^3 x}\, dx$

60. $\int \operatorname{sen}^3\left(\frac{x}{2}\right) \cos^5\left(\frac{x}{2}\right) \, dx$

61. $\int \dfrac{1}{\operatorname{sen}^5 x \cos^3 x}\, dx$

62. $\int \operatorname{sen}^4 x \; dx$

63. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^5 x \, dx$

64. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \; dx$

65. $\int \cos^6(3x)\, dx$

66. $\int \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^6 x}\, dx$

67. $\int \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^4 x}\, dx$

68. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$

69. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx$
(Dica: Faça $u = \sqrt[6]{x}$)

II - Cálculo de área

1. Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de $f(x) = x^3 - 2x + 1$ e $g(x) = -x + 1$, com $-1 \leq x \leq 1$.

2. Desenhe a região $A = B \cap C \cap D$ e calcule a área de A, onde

   $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - 4\},\; C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 12 - 3x^2\}$ e

   $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 3x^2 + 12x + 12\}$ (Resp.: 104/3)

3. Desenhe a região $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - 1,\, y \leq x + 1 \text{ e } y \geq -x^2 - 3x - 2\}$ e calcule a sua área. (Resp.: 107/24)

4. Sejam $F : [-1,3] \to \mathbb{R}$ contínua com $f(x) \leq 0$, para todo $x \in [-1,3]$, e suponha que os conjuntos

   $$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 3 \text{ e } y \geq f(x)\}$$

   e

   $$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 3 \text{ e } y \leq x^2 + 3\}$$

   sejam tais que a área de $A \cap B$ é igual a 23. Calcule $\int_{-1}^{3} f(x)dx$. (Resp.: -5/3)

5. Determine $m > 0$ para que a área delimitada por $y = x^2,\; y = \dfrac{x^2}{2}$ e pela reta $y = mx$ seja igual a 4. (Resp.: $m = 2$)

6. Calcule a área da região limitada pelo gráfico de $f(x) = x^3$ e pela reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1)$. (Resp.: 27/4)

7. Desenhe a região do plano delimitada pela curva $y = x^3 - x$ e por sua reta tangente no ponto de abscissa $x = -1$. Calcule a área desta região. (Resp.: 27/4)

8. Encontre a área da região limitada entre as curvas $x = y^3 - y$ e $x = 1 - y^4$. (Resp.: 8/5)

9. Calcule $\int_0^1 (x + \sqrt{1 - x^2})dx$, interpretando-a como uma área. (Resp.: $\pi/4 + 1/2$)

10. Calcule $\int_{-1}^1 x^3 \text{sen}(x^2 + 1)dx$. (Resp.: 0)

III. Aplicações da Integral

1. Encontre o volume de uma pirâmide cuja base é o quadrado de lado L e cuja altura é h.

2. Considere o sólido cuja base é o astróide de equação $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ e cujas seções transversais por planos paralelos ao plano Oxz são quadrados. Calcule seu volume.

3. Calcule $\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n}\left(\text{sen}\frac{\pi}{n} + \text{sen}\frac{2\pi}{n} + ... + \text{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$. (Resp.: 2)

4. Se uma **força constante** de magnitude F for aplicada na direção e sentido do movimento de um objeto e se esse objeto move-se uma distância d, definimos o **trabalho** W realizado pela força sobre o objeto como sendo $W = F.d$. Suponha que um objeto move-se na direção positiva ao longo do eixo x, sujeito a uma **força variável** $\vec{F}(x)$. Denotaremos por $F(x)$ a componente escalar de $\vec{F}(x)$ na direção do movimento, isto é, $F(x) = |\vec{F}(x)|$, se $\vec{F}(x)$ tiver o mesmo sentido que o movimento, e $F(x) = -|\vec{F}(x)|$, caso contrário. Defina o **trabalho** W **realizado pela força sobre o objeto** quando este se move de $x = a$ até $x = b$ e encontre uma fórmula para calculá-lo.

5. *Energia cinética.* Use as notações do exerccio anterior, a segunda lei de Newton e a regra da cadeia
$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

para mostrar que o trabalho realizado por uma força F atuando sobre uma partícula de massa m que se moveu de x_1 até x_2 é

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2,$$

onde v_1 e v_2 são as velocidades do corpo em x_1 e x_2. Em Física, a expressão $(1/2)mv^2$ é chamada de **energia cinética** de um corpo em movimento com velocidade v. Portanto, o trabalho realizado por uma força é igual à variação da energia cinética do corpo e podemos determinar o trabalho calculando esta variação.

6. Calcule o comprimento do gráfico de $f(x) = \ln(\cos x)$, para $0 \le x \le \pi/4$.

7. Calcule o comprimento da astróide cuja equação é $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

8. Calcule a área da região interna ao laço formado pela curva $y^2 = x^2(x+3)$.

9. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo Ox do conjunto

   a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le xy \le 2,\ x^2 + y^2 \le 5 \text{ e } x > 0\}$

   b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge \sqrt{x} \text{ e } (x-1)^2 + y^2 \le 1\}$

   c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2 \text{ e } e^{-x} \le y \le e^x\}$

10. Sejam S_1 o sólido limitado pela esfera de centro na origem e raio 2 e S_2 o sólido obtido pela rotação de $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 9 \text{ e } |y| \le \sqrt{x}\}$ em torno do eixo Ox. Determine o volume do sólido $S = S_1 \cap S_2$.

11. Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-2)^2 \le 1\}$. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação de A em torno do eixo Ox.

12. Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \text{ e } \ln(x+1) + 2 \le y \le e^x + 4\}$. Determine o volume do sólido obtido pela rotação de A em torno da reta $y = 2$.

13. O disco $x^2 + y^2 \le a^2$ é girado em torno da reta $x = b$ $(b > a)$ para gerar um sólido, com a forma de um pneu. Esse sólido é chamado **toro**. Calcule seu volume. (Sugestão: Note que $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\, dy = \frac{\pi a^2}{2}$.)

14. Calcule o volume de uma calota esférica de altura h, $(h \le a)$ de uma esfera de raio a.

15. Determine o comprimento da curva $y = \cosh x, \quad -3 \leq x \leq 4$.

IV - Miscelânea

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e periódica de período $2L$ ($L > 0$) (isto é, $f(x+2L) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$). Seja $n \in \mathbb{Z}$. Prove que:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\,dx = \frac{1}{L}\int_{a}^{a+2L} f(x)\cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\,dx.$$

2. Seja f uma função contínua em um intervalo $[a,b]$ e sejam $u(x)$ e $v(x)$ funções diferenciáveis, cujos valores estão em $[a,b]$. Então

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}.$$

A fórmula acima é conhecida como **Regra de Leibniz**.

3. Calcule $g'(x)$ onde

(a) $g(x) = \displaystyle\int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} e^{t^2}dt$

(b) $g(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \operatorname{sen}(t^2)dt$

4. Use o Polinômio de Taylor para calcular $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx$ com erro inferior a 10^{-5}.

5. Calcule $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{x+1}dx$ em termos de $A = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2}dx$.

6. A temperatura de uma localidade, em um certo dia, foi modelada por $T(t) = 16 + 7\operatorname{sen}\left(\dfrac{t-6}{16}\pi\right)$ com t expresso em horas, $6 \leq t \leq 22$ e $T(t)$ em graus Celsius. Determine a temperatura média deste local, neste dia.

7. A respiração humana ocorre em ciclos de aproximadamente 5 seg, começando pela inspiração (inalação) e terminando pela expiração. A função

$$f(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{5}\right)$$

tem sido usada para modelar a taxa de fluxo de ar para dentro dos pulmões (em Litros/seg).

(i) Use este modelo para encontrar o volume de ar inalado nos pulmões no instante t, para $0 \leq t \leq 2,5$.
(ii) Calcule o volume médio de ar que é inalado por segundo, no intervalo $0 \leq t \leq 2,5$.

8. Seja f uma função contínua em um intervalo I contendo a origem e seja

$$y = y(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(x-t) f(t) dt.$$

Prove que $\begin{cases} y'' + y = f(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}.$

RESPOSTAS

I - Integrais Indefinidas

1) $\dfrac{x^6}{6} + x - \dfrac{1}{x} + k$

2) $\dfrac{e^{2x}}{2} + k$

3) $\dfrac{\text{sen } 7x}{7} + k$

4) $\text{tg}x - x + k$

5) $7 \ln |x-2| + k$

6) $\dfrac{\text{tg}^4 x}{4} + k$

7) $2\sqrt{\cos x}\left(\dfrac{\cos^2 x}{5} - 1\right) + k$

8) $-\ln|\cos x| + k$

9) $\dfrac{\text{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + k$

10) $\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + k$

11) $\dfrac{1}{2} arctg\, x^2 + k$

12) $x - \text{arctg}\, x + k$

13) $-\dfrac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + k$

14) $\ln|\sec x + \text{tg}\, x| + k$

15) $2\sqrt{1 + \ln x} + k$

16) $\dfrac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+1)^6} + k$

17) $\ln(2x^2+8x+20)+k$

18) $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}+k$

19) $\ln|\text{arcsen}\, x|+k$

20) $\ln(1+e^x)+k$

21) $-\ln(1+\cos^2 x)+k$

22) $\frac{1}{3}e^{x^3}+k$

23) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+e^x)^4}+k$

24) $-2\cos\sqrt{x}+k$

25) $e^{\text{arctg}\, x}+k$

26) $2(x+1)^{2003}\left(\frac{x+1}{2004}-\frac{1}{2003}\right)+k$

27) $-x\cos x+\text{sen }x+k$

28) $\frac{1}{2}e^x(\text{sen }x+\cos x)+k$

29) $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+k$

30) $x\ln x-x+k$

31) $(-x-1)e^{-x}+k$

32) $\frac{x^2}{2}\text{arctg}\, x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\text{arctg}\, x+k$

33) $x\text{arcsen}\, x+\sqrt{1-x^2}+k$

34) $\frac{1}{2}\sec x\,\text{tg}\, x+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\text{tg}\, x|+k$

35) $\frac{1}{2}(x-\text{sen }x\cos x)+k$

36) $\frac{\text{sen}^3 x}{3}-\frac{\text{sen}^5 x}{5}+k$

37) $\frac{1}{8}\left(x-\frac{\text{sen }4x}{4}\right)+k$

38) $\ln|1+\text{sen }x|+k$

39) $6\ln|x-1|-25\ln|x-2|+22\ln|x-3|+k$

40) $\frac{\sqrt{6}}{12}\text{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right)+k$

41) $-22\ln|x-1|+\frac{12}{x-1}+25\ln|x-2|+k$

42) $\frac{x^3}{3}+\frac{35}{12}\ln|x-2|+\frac{61}{24}\ln\left[1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]+\frac{\sqrt{3}}{12}\text{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+k$

43) $\frac{1}{2}\text{arcsen}x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+k$

44) $\frac{x}{8}(2x^2-1)\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{8}\text{arcsen}x+k$

45) $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+k$

46) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+k$

47) $\ln|\sqrt{5-2x+x^2}+x-1|+k$

48) $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln x-\dfrac{2}{3}\right)+k$

49) $\dfrac{x}{2}\left[\operatorname{sen}(\ln x)-\cos(\ln x)\right]+k$

50) $\dfrac{1}{2}\ln|x^2-4|+k$

51) $2\ln|x-1|+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}+k$

52) $x\sqrt{a^2+b^2x^2}+\dfrac{a^2}{2b}\ln\left[\dfrac{bx}{a}+\dfrac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a}\right]+k$

53) $\dfrac{1}{b}\ln\left[\dfrac{bx}{a}+\dfrac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a}\right]+k$

54) $\dfrac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2}+\dfrac{1}{2}\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+2})$ +k

55) $\left(\dfrac{x+1}{2}\right)\sqrt{3-2x-x^2}+2\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x+1}{2}\right)+k$

56) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)+k$

57) $\operatorname{sen}\, x-\dfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x+k$

58) $-\cos x+\dfrac{2}{3}\cos^3 x-\dfrac{1}{5}\cos^5 x+k$

59) $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{2}-\dfrac{1}{2\operatorname{sen}^2\, x}-2\ln|\operatorname{sen}\, x|+k$

60) $\dfrac{1}{4}\cos^8\left(\dfrac{x}{2}\right)-\dfrac{1}{3}\cos^6\left(\dfrac{x}{2}\right)+k$

61) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+3\ln|\operatorname{tg}x|-\dfrac{3}{2\operatorname{tg}^2 x}-\dfrac{1}{4\operatorname{tg}^4 x}+k$

62) $\dfrac{3x}{8}-\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{4}+\dfrac{\operatorname{sen}(4x)}{32}+k$

63) $\dfrac{-}{\cos^3 x}3+2\dfrac{\cos^5 x}{5}-\dfrac{\cos^7 x}{7}+k$

64) $\dfrac{x}{16}-\dfrac{\operatorname{sen}(4x)}{64}+\dfrac{\operatorname{sen}^3(2x)}{48}+k$

65) $\dfrac{5}{16}x+\dfrac{1}{12}\operatorname{sen}(6x)+\dfrac{1}{64}\operatorname{sen}(12x)-\dfrac{\operatorname{sen}^3(6x)}{144}+k$

66) $-\dfrac{\operatorname{cotg}^3 x}{3}-\dfrac{\operatorname{cotg}^5 x}{5}+k$

67) $\operatorname{tg}x+\dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-2\operatorname{cotg}(2x)+k$

68) $arc\,sen\,x+\sqrt{1-x^2}+k$

69) $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+k$

III. Aplicações da Integral

2) $\dfrac{128}{105}a^3$ 3) 2 6) $\ln(1+\sqrt{2})$ 7) $6a$

8) $\dfrac{24}{5}\sqrt{3}$ 9a) $\pi\left[\int_0^1 (5-x^2)dx + \int_1^2 \dfrac{4}{x^2}dx + \int_2^{\sqrt{5}}(5-x^2)dx\right] = ...$

9b) $\dfrac{\pi}{6}$ 9c) $\dfrac{\pi}{2}(e^2-e^{-2})^2$

10) $\sqrt{x} = \sqrt{4-x^2} \Longleftrightarrow x = x_0 = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$; $V(S_1\cap S_2) = \pi\left[\displaystyle\int_0^{x_0} x dx + \int_{x_0}^2 (4-x^2)dx\right] = ...$

11) $4\pi^2$ 12) $\pi\left[\int_0^1 (e^x+2)^2 dx - \int_0^1 \ln^2(x+1)dx\right] = ...$

13) $(2\pi b)(\pi a^2)$ 14) $\pi\left(a-\dfrac{h}{3}\right)h^2$ 15) $\operatorname{senh} 4 + \operatorname{senh} 3$.

IV - Miscelânea

5) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\pi+2}+\dfrac{1}{2}-A\right)$ 6) $\left(16+\dfrac{14}{\pi}\right)^\circ C \approx 20,45^\circ C$

7) a) $v(t) = \dfrac{5}{4\pi}\left(1-\cos\dfrac{2\pi t}{5}\right)L$; b) $\dfrac{1}{\pi}L$