MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI)

Lista de Exercícios sobre o Método dos Mínimos Quadrados

1: Usando o método dos mínimos quadrados de maneira conveniente, aproxime os pontos da tabela abaixo por uma função do tipo $a + bx$.

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	4	8

2: Um objeto foi lançado verticalmente do alto de um prédio. Sua altura foi registrada a cada segundo após o lançamento e os dados obtidos encontram-se na tabela abaixo.

Altura (m)	192	180	150	115	72
Tempo (s)	1	2	3	4	5

Utilize o método dos mínimos quadrados para estimar a altura do prédio h, a velocidade inicial de lançamento v_0 e o valor da aceleração da gravidade g.

3: (a) Determine uma base ortogonal, em relação ao produto interno

$$\langle f, g\rangle \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx,$$

para o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a dois (com coeficientes reais).

(b) Determine os coeficientes a, b, c para os quais o valor da integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin x - a - bx - cx^2\right)^2\,dx$$

seja o menor possível.

4: Seja $f(x) \;=\; \pi \;-\; |x|$ definida no intervalo $[-\pi, \pi]$.

(a) Efetue a análise harmônica de f até o harmônico de terceira ordem.

(b) Determine o polinômio da forma $p(x) \;=\; a_0 + a_1x + a_2x^2$ que melhor aproxima f no intervalo dado segundo o produto interno:

$$\langle \phi, \psi\rangle \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)\psi(x)dx.$$

(c) Qual das duas aproximações, a harmônica da parte (a) ou a polinomial da parte (b), é a que envolve o menor erro quadrático? Justifique.

5: Efetue a análise harmônica da função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \;=\; \left|\,|x| - \frac{1}{4}\right|$$

até o harmônico de primeira ordem.

6: Os polinômios $\{1, x, x^2 - 1/3\}$ são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ em relação ao produto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. Use este fato para aproximar a função $f(t) = 1 - |2t - 5|$ no intervalo $[2, 3]$ por polinômios de grau menor ou igual a 2 pelo método dos mínimos quadrados (segundo o produto interno $\langle f, g\rangle = \int_{2}^{3} f(t)g(t)dt$).

7: Os preços de um ativo financeiro em 6 meses consecutivos ($t_i = i,\ i = 1,\ldots,6$) são os seguintes $R = (21.3, 21.8, 21.2, 21.3, 20.5, 21.0)$ (valores em reais). Desejamos estimar o comportamento dos preços segundo uma função linear $\bar{R}(t) = \alpha + \beta t$, atribuindo maior peso às observações mais recentes. Usaremos os seguintes pesos para os meses de 1 a 6: $\lambda = (0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0)$. Pede-se determinar: a reta de ajuste de mínimos quadrados $\bar{R}$, segundo o produto interno $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{6} \lambda_i x_i y_i$, e a volatilidade da amostra, isto é, o valor σ dado por $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{6} \lambda_i\big(R_i - \bar{R}(t_i)\big)^2$, onde R_i são as componentes do vetor R dos preços do ativo financeiro.

8: São dadas as funções $u = (-1/2, -1/2, 0, 3/2, 1/2)$, $v = (0, 1, -1, 1, 0)$, $w = (1, 2, 0, 1, 0)$ e $p = (1, 1, 1, 1, 1)$, todas elas definidas nos pontos $x_i = i$, $i = 1,\ldots,5$. Desejamos determinar a, b e c reais, tal que $\|f - p\|$ seja mínimo, onde $f = au + bv + cw$ e $\|f - p\|^2 = \sum_{i=1}^{5} \big(f(x_i) - p(x_i)\big)^2$.

(a) Escreva um sistema linear para a resolução deste problema.

(b) Verifique se o critério de Sassenfeld para convergência do método de Gauss-Seidel é satisfeito para este sistema.

(c) Reordene o sistema (através de uma reordenação dos vetores u, v e w) de forma a garantir a convergência do método de Gauss-Seidel para este sistema.

9: Sabe-se que $p(x) = 3x/4$ é o polinômio de grau menor ou igual a 2 que melhor aproxima a função $f(x)$ no intervalo [-1,1] pelo método dos mínimos quadrados (com o produto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$), onde $f(x) = x^2$, se $x \in [0, 1]$ e $f(x) = -x^2$, se $x \in [-1, 0]$. Sabendo que as funções 1, x e $x^2 - 1/3$ são os 3 primeiros polinômios mônicos ortogonais em relacão ao produto interno dado, determine o polinômio de grau menor ou igual a 3 que melhor aproxima $f(x)$ em [-1,1] pelo MMQ.

10: É dada uma funcão contínua f, de período 4, linear em cada intervalo $[i, i + 1]$, $i \in \mathbb{Z}$, tal que $f(-2) = f(2) = 1$, $f(-1) = f(1) = 0$ e $f(0) = 2$. Faça a análise harmônica de f até os harmônicos de ordem 2.

11: Mediu-se o valor de uma função f nos instantes 0, 1, 2 e 3, obtendo-se respectivamente os valores 0.6, 4.7, 40 e 365. Sabendo que $f(x)$ é da forma $f(x) = a3^{bx}$, utilize o método dos mínimos quadrados para estimar os valores de a e b.

12: Em uma fábrica dispõe-se de 3 máquinas para produção de 4 produtos (p_1, p_2, p_3 e p_4). A máquina m_1 produz 6 toneladas por hora, sendo 3 de p_1, 0 de p_2, 1 de p_3 e 2 de p_4, a máquina m_2 produz 6 toneladas por hora, sendo 2 de p_1, 1 de p_2, 2 de p_3 e 1 de p_4, enquanto que a máquina m_3 produz 5 toneladas por hora, sendo 1 de p_1, 3 de p_2, 0 de p_3 e 1 de p_4. A fábrica recebe um pedido de 11 toneladas de p_1, 7.9 de p_2, 6.4 de p_3 e 9.3 de p_4. Determine quantas horas deve ser utilizada cada máquina de maneira que a soma dos quadrados das diferenças entre as quantidades pedidas e produzidas de cada produto seja mínima.

13: Determine os termos gerais da Análise Harmônica da função 2π periódica ϕ_ϵ dada por: $\phi_\epsilon(x) = 1/\epsilon$ para $x \in [-\epsilon/2, \epsilon/2]$ e $\phi_\epsilon(x) = 0$ para $x \in [-\pi, -\epsilon/2[$ e $x \in]\epsilon/2, \pi]$, onde $\epsilon < 1$. Como eles se comportam quando $\epsilon \to 0$?

14: Determine a, b e c de maneira a tornar mínimo o valor de:

$$\int_0^1 (a + bx + c\cos 2\pi x - \sin 2\pi x)^2\,dx$$

15: Aproxime a função tabelada abaixo por uma função do tipo

$$g(t) = \frac{100}{1 + \alpha e^{-\beta t}}$$

(determinando α e β), através de um método de mínimos quadrados discreto.

t	0	1	2	3	4	5	6
$F(t)$	10	15	23	33	45	58	69