

Relações min-max em otimização combinatória

MARCEL K. DE CARLI SILVA

ORIENTADORA: YOSHIKO WAKABAYASHI

Financiado parcialmente pela FAPESP 04/11338-3.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Breve histórico	1
1.2	Técnicas de prova	2
2	Preliminares	4
2.1	Preliminares gerais	4
2.2	Teoria dos grafos	8
2.3	Programação linear e inteira	16
3	Alguns resultados clássicos equivalentes	23
3.1	O teorema de emparelhamentos de Kőnig	23
3.2	O teorema do casamento de Hall	28
3.3	O teorema de Menger e suas versões	30
3.4	Fluxos máximos e cortes mínimos	34
3.5	Equivalência entre os resultados	40
4	Arborescências de comprimento mínimo	44
4.1	Conceitos básicos	45
4.2	O teorema da arborescência ótima	46
4.3	Abordagem poliédrica	47
4.4	O algoritmo de Edmonds-Fulkerson	52
5	Ramificações disjuntas	57
5.1	O teorema das ramificações disjuntas	57
5.2	r -arborescências disjuntas	60
5.3	Arborescências disjuntas	62
5.4	Arborescências disjuntas de comprimento mínimo	64
6	Junções mínimas	65
6.1	Conceitos básicos	65
6.2	O teorema de Lucchesi-Younger	68
6.3	Quebra-circuitos em grafos planares	72
	Referências bibliográficas	74

Capítulo 1

Introdução

Relações min-max aparecem em diversos dos problemas bem resolvidos de otimização combinatória. Além da sua elegância, elas costumam vir acompanhadas de boas caracterizações, descrições poliédricas e algoritmos polinomiais para os respectivos problemas de minimização e maximização.

Temos especial interesse nesse tipo de relação quando a estrutura subjacente é um grafo, com ou sem pesos associados aos seus vértices ou arestas. Tais relações expressam que o valor mínimo em um problema de otimização é igual ao valor máximo em outro problema, cada um dos quais objetiva encontrar uma sub-estrutura combinatória.

Elas fornecem ainda critérios de otimalidade para os correspondentes problemas, bem como uma “boa caracterização”. Além disso, podem ser usadas em análises de sensibilidade: através delas podemos entender como e quanto varia o ótimo de um problema quando variamos certas restrições.

Um outro aspecto interessante é o fato de que, em muitos casos, os problemas podem ser formulados como problemas de otimização sobre poliedros e, quando isso ocorre, ferramentas de combinatória poliédrica se mostram muito úteis em termos algorítmicos.

1.1 Breve histórico

Os primeiros resultados desse tipo foram obtidos por König e Menger em torno de 1930. O celebrado teorema min-max de König [Kön31], obtido em 1931, afirma que, num grafo bipartido, o tamanho máximo de um emparelhamento é igual ao tamanho mínimo de uma cobertura por vértices. Menger [Men27] provou em 1927, num contexto topológico, que o número máximo de caminhos disjuntos nos vértices entre um dado par de conjuntos de vértices é igual ao número mínimo de vértices que intersectam cada um desses tais caminhos. Esses dois resultados são, na verdade, equivalentes. Eles constituem as primeiras relações min-max encontradas na teoria dos grafos, tendo sido provadas de maneira puramente combinatória.

Nesses últimos 70 anos, muitas outras relações min-max foram encontradas, bem como várias provas distintas para aquelas que já eram conhecidas. Os primeiros resultados revelando os aspectos algorítmicos e poliédricos de relações min-max foram obtidos em torno de 1950 por Ford e Fulkerson [FF54, FF56] e Dantzig e Fulkerson [DF55, DF56] sobre fluxos em redes e por Hoffman [Hof60, Hof79], Hoffman e Kruskal [HK56], Kuhn [Kuh55] e Munkres [Mun57] sobre emparelhamentos em grafos bipartidos, retomando o trabalho de Egerváry [Ege31]. O célebre algoritmo húngaro para encontrar um emparelhamento perfeito de peso mínimo num grafo bipartido pode ser considerado como um trabalho conjunto de Egerváry [Ege31], Kuhn [Kuh55] e Munkres [Mun57]. Todos esses resultados estão diretamente relacionados com a unimodularidade total das matrizes de incidência em questão.

Nas décadas de 60 e 70, a visão e o trabalho pioneiro de Edmonds formaram a base da combinatória poliédrica. Edmonds [Edm65c] também introduziu o conceito de polinomialidade como medida de eficiência para algoritmos, fundamental para o posterior desenvolvimento da teoria de complexidade computacional, incluindo as definições das classes de complexidade **P**, **NP** e **coNP**. De extrema importância é a classe $\mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}$, que pode ser vista como a classe dos problemas que admitem uma boa caracterização, formalizando assim o conceito de “princípio do supervisor absoluto” de Edmonds [Edm65b]. Os resultados de Edmonds [Edm65c, Edm65a, Edm65b, Edm67, Edm73, EG77] envolvem emparelhamentos, matróides e arborescências. O trabalho de Edmonds [Edm65c, Edm65a] sobre emparelhamentos pode ser visto como uma extensão algorítmica e poliédrica dos resultados min-max de Tutte [Tut47].

Dentre diversos outros teoremas min-max já provados, destacamos os obtidos por Lovász [Lov80] sobre retas independentes em uma geometria projetiva, por Lucchesi e Younger [LY78] sobre cortes orientados disjuntos, por Schrijver [Sch82, Sch83] e Feofiloff e Younger [FY87] sobre coleções disjuntas de transversais de cortes orientados, por Mader [Mad89] sobre S -caminhos, por Seymour [Sey77] sobre a propriedade max-fluxo min-corte para matróides, etc.

1.2 Técnicas de prova

Para provar relações min-max, podemos utilizar técnicas puramente combinatórias ou então técnicas da combinatória poliédrica. Ambos os tipos de provas podem fornecer um algoritmo como subproduto.

As demonstrações puramente combinatórias em geral utilizam propriedades *ad hoc*, de caráter teórico específico ao problema em foco. As demonstrações dos teoremas de Kőnig e Menger, mencionados acima, foram originalmente desse tipo.

Já as provas poliédricas formulam o problema em questão como um pro-

grama linear e, através das poderosas técnicas da combinatória poliédrica, estabelecem que tal programa e o seu dual têm soluções ótimas inteiras. Esse fato pode seguir, por exemplo, da unimodularidade total da matriz em questão. A prova do teorema do fluxo máximo e corte mínimo de Ford-Fulkerson pode ser feita assim.

Em ambos os casos, é tipicamente fácil mostrar $\max \leq \min$.

As provas podem ser puramente existenciais, como por exemplo a prova de Lovász [Lov76] para o teorema de Lucchesi-Younger. Porém, em muitos casos a demonstração fornece facilmente um algoritmo para resolver ambos os problemas, o de maximização e minimização, em tempo polinomial. Este é o caso, por exemplo, do teorema da arborescência ótima de Edmonds.

Outra forma de prova algorítmica é a seguinte. Suponha que queremos resolver um problema de maximização. Então o algoritmo ou melhora a solução corrente, ou então mostra que tal solução é ótima construindo uma solução viável para o problema de minimização com o mesmo valor objetivo. Esse é o caso, por exemplo, da prova original do teorema de König, bem como do algoritmo de Ford e Fulkerson para fluxo máximo e corte mínimo.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo, introduzimos a terminologia e notação a serem utilizadas no restante deste texto. Seguimos basicamente o livro enciclopédico de Schrijver [Sch03a, Sch03b, Sch03c].

Com algumas exceções, não provamos os resultados enunciados. Em relação às demonstrações omitidas, encaminhamos o leitor ao livro de otimização combinatória de Schrijver [Sch03a, capítulos 2–5], ao livro de teoria dos grafos de Diestel [Die00] e ao livro de programação linear e inteira de Schrijver [Sch86].

Assumimos do leitor alguma familiaridade com algoritmos e complexidade computacional, como por exemplo estruturas de dados básicas, consumo de tempo polinomial como critério de eficiência, o conceito de polinomialidade forte, etc. Supomos que o leitor conhece alguns algoritmos simples sobre grafos, como por exemplo busca em largura e em profundidade. Os conceitos relevantes podem ser revisados no livro de Schrijver [Sch03a, capítulos 4 e 6].

O capítulo está organizado da seguinte maneira. Na seção 2.1, estabelecemos a notação e a terminologia básica, como conjuntos, vetores, etc. Na seção 2.2, estudamos e revisamos alguns conceitos básicos de teoria dos grafos, tanto para o caso não-orientado como para o orientado. Finalmente, na seção 2.3, fazemos um apanhado de teoria de programação linear e inteira.

2.1 Preliminares gerais

2.1.1 Conjuntos

Conjuntos em geral são denotados por uma letra maiúscula. Se Y é um subconjunto de X , escrevemos $Y \subseteq X$. Se $Y \neq X$, então dizemos que Y é um subconjunto *próprio* de X , e denotamos isso por $Y \subsetneq X$.

O conjunto dos números inteiros é denotado por \mathbb{Z} , o dos racionais por \mathbb{Q} e o dos reais por \mathbb{R} . Se quisermos nos restringir apenas aos elementos não-

negativos de um conjunto X , escreveremos $X_{\geq 0}$. Assim, $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ denota o conjunto dos racionais não-negativos, por exemplo.

Seja $x \in \mathbb{R}$. O *piso* de x , denotado por $\lfloor x \rfloor$, é o maior inteiro que não excede x . O *teto* de x , denotado por $\lceil x \rceil$, é o menor inteiro n tal que $x \leq n$.

Exceto por \mathbb{Z}, \mathbb{Q} e \mathbb{R} , todos os conjuntos desse texto são finitos. O *tamanho* de um conjunto X é a sua cardinalidade e é denotado por $|X|$.

Uma *família* é um conjunto no qual pode ocorrer repetição dos elementos. Em outros textos, famílias são usualmente chamadas de multiconjuntos. Uma *coleção* é simplesmente um conjunto, no sentido usual.

Dados conjuntos X e Y , sua união é denotada por $X \cup Y$ e sua intersecção por $X \cap Y$. O conjunto dos elementos de X mas não de Y é denotado por $X \setminus Y$. A *diferença simétrica* entre os conjuntos X e Y é

$$X \triangle Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X). \quad (2.1)$$

Dizemos que os conjuntos X_1, \dots, X_k são *disjuntos* se eles são mutuamente disjuntos, isto é, se $X_i \cap X_j = \emptyset$ para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, k\}$ distintos.

Seja E um conjunto. Uma *partição* de E é uma coleção $\{X_1, \dots, X_k\}$ de subconjuntos disjuntos de E tal que $\bigcup_{i=1}^k X_i = E$. Cada elemento X_i da partição é chamado de *parte* ou *classe* da partição.

O seguinte teorema será útil mais tarde:

Teorema 2.1

Seja S um conjunto finito e sejam $T, U \subseteq S$ com $T \not\subseteq U$ e $U \not\subseteq T$. Então

$$|T| \cdot |\overline{T}| + |U| \cdot |\overline{U}| > |T \cap U| \cdot |\overline{T \cap U}| + |T \cup U| \cdot |\overline{T \cup U}|, \quad (2.2)$$

onde $\overline{X} := S \setminus X$ para todo $X \subseteq S$.

Demonstração: Defina $\alpha := |T \cap U|$, $\beta := |T \setminus U|$, $\gamma := |U \setminus T|$ e $\delta := |\overline{T \cup U}|$. Temos

$$\begin{aligned} |T| \cdot |\overline{T}| + |U| \cdot |\overline{U}| &= (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) + (\alpha + \gamma)(\beta + \delta) \\ &= 2\alpha\delta + 2\beta\gamma + \alpha\gamma + \beta\delta + \alpha\beta + \gamma\delta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |T \cap U| \cdot |\overline{T \cap U}| + |T \cup U| \cdot |\overline{T \cup U}| &= \alpha(\beta + \gamma + \delta) + (\alpha + \beta + \gamma)\delta \\ &= 2\alpha\delta + \alpha\gamma + \beta\delta + \alpha\beta + \gamma\delta. \end{aligned}$$

Agora basta usar o fato de que, por hipótese, temos $\beta\gamma > 0$. □

Pares de anticadeias bloqueadoras

Seja E um conjunto. Uma coleção $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_k\}$ de subconjuntos de E é uma *anticadeia* se $F_i \not\subseteq F_j$ para todos $i, j \in \{1, \dots, k\}$ distintos. Dizemos ainda que \mathcal{F} é uma *anticadeia sobre E* .

Seja \mathcal{F} uma anticadeia sobre E . Defina

$$b(\mathcal{F})^\uparrow := \{H \subseteq E : H \cap F \neq \emptyset \text{ para todo } F \in \mathcal{F}\}. \quad (2.3)$$

A *anticadeia bloqueadora de \mathcal{F}* , denotada por $b(\mathcal{F})$, é definida como a coleção dos conjuntos minimais da coleção $b(\mathcal{F})^\uparrow$. É óbvio que $b(\mathcal{F})$ é novamente uma anticadeia, justificando seu nome. O par $(\mathcal{F}, b(\mathcal{F}))$ é dito um *par de anticadeias bloqueadoras*.

Lawler [Law66] e Edmonds e Fulkerson [EF70] notaram a seguinte relação de dualidade entre um par de anticadeias bloqueadoras.

Teorema 2.2

Seja \mathcal{F} uma anticadeia sobre um conjunto finito E . Então

$$b(b(\mathcal{F})) = \mathcal{F}. \quad (2.4)$$

Demonstração: Denote $\mathcal{H} := b(\mathcal{F})$. Defina

$$\mathcal{F}^\uparrow := \{F' \subseteq E : F' \supseteq F \text{ para algum } F \in \mathcal{F}\}.$$

Por definição, todo conjunto $F \in \mathcal{F}$ satisfaz $F \cap H \neq \emptyset$ para todo $H \in \mathcal{H}$, de modo que $\mathcal{F} \subseteq b(\mathcal{H})^\uparrow$, e portanto $\mathcal{F}^\uparrow \subseteq b(\mathcal{H})^\uparrow$.

Seja $U \subseteq E$ com $U \notin \mathcal{F}^\uparrow$. Então, para todo $F \in \mathcal{F}$, temos $F \not\subseteq U$ e portanto $(E \setminus U) \cap F \neq \emptyset$. Logo, $E \setminus U \in b(\mathcal{F})^\uparrow$, e portanto $E \setminus U \supseteq H$ para algum $H \in \mathcal{H}$. Mas então $U \cap H = \emptyset$. Segue que $U \notin b(\mathcal{H})^\uparrow$, ou seja, $b(\mathcal{H})^\uparrow \subseteq \mathcal{F}^\uparrow$.

Mostramos assim que $\mathcal{F}^\uparrow = b(\mathcal{H})^\uparrow$. Mas então é evidente que os conjuntos minimais de \mathcal{F}^\uparrow coincidem com os conjuntos minimais de $b(\mathcal{H})^\uparrow$, como queríamos. \square

2.1.2 Vetores, matrizes e funções

Todos os vetores desse texto são vetores-coluna. Os *componentes* ou *entradas* de um vetor $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ são x_1, \dots, x_n . O *suporte* de x é o conjunto de índices i tais que $x_i \neq 0$ e é denotado por $\text{supp}(x)$.

Um vetor é dito *integral* se todas suas entradas são inteiras.

Sejam E e R conjuntos. Denotamos por R^E o conjunto dos vetores indexados por elementos de E tal que cada componente é um elemento de R . Por exemplo, se V é um conjunto, então $\mathbb{Z}_{\geq 0}^V$ é o conjunto de todos os vetores indexados por elementos de V cujos componentes são inteiros não-negativos. Cada elemento de R^E pode também ser visto como uma função de E para R .

Seja $x \in \mathbb{R}^E$. O componente de x indexado por $e \in E$ é denotado por x_e ou $x(e)$. Seja F um subconjunto de E e suponha que \mathbb{R} está munido de uma operação de soma. Denotamos

$$x(F) := \sum_{e \in F} x_e. \quad (2.5)$$

O *vetor de incidência* ou *vetor característico* de um subconjunto F de E é o vetor

$$\chi^F(e) := \begin{cases} 1, & \text{se } e \in F; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Denotamos $\mathbf{1} := \chi^E$ como o vetor que tem todas as entradas iguais a 1.

Em diversos trechos vamos nos referir a uma função capacidade, digamos $c \in \mathbb{R}^E$, ou uma função comprimento, digamos $\ell \in \mathbb{R}^E$. Nesse caso, se F é um subconjunto de E , diremos que $c(F)$ é a capacidade de F e que $\ell(F)$ é o comprimento de F .

Sejam $a, b \in \mathbb{R}^E$. Escrevemos $a \leq b$ se $a_e \leq b_e$ para todo $e \in E$.

Sejam U, V conjuntos. Uma matriz $U \times V$ é uma matriz cujas linhas são indexadas por elementos de U e cujas colunas são indexadas por elementos de V . Seja M uma matriz $U \times V$. A entrada de M indexada por $u \in U$ e $v \in V$ é denotada por $M_{u,v}$, também denotada por $M(u, v)$. O determinante de uma matriz M é denotado $\det(M)$.

Funções submodulares

Seja S um conjunto. Denote por $\mathcal{P}(S)$ a coleção de todos os subconjuntos de S . Seja $f: \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é *submodular* se

$$f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \leq f(X) + f(Y) \quad (2.7)$$

para quaisquer $X, Y \in \mathcal{P}(S)$. Dizemos que f é *supermodular* se $-f$ é submodular.

Famílias laminares e livres de cruzamentos

Seja S um conjunto e \mathcal{C} uma família de subconjuntos de S . Dizemos que \mathcal{C} é *livre de cruzamentos* se, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, vale que

$$X \subseteq Y \quad \text{ou} \quad Y \subseteq X \quad \text{ou} \quad X \cap Y = \emptyset \quad \text{ou} \quad X \cup Y = S. \quad (2.8)$$

Dizemos que \mathcal{C} é *laminar* se, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, vale que

$$X \subseteq Y \quad \text{ou} \quad Y \subseteq X \quad \text{ou} \quad X \cap Y = \emptyset. \quad (2.9)$$

Famílias laminares podem ser caracterizadas como as famílias de subconjuntos de S que admitem uma representação por diagrama de Venn no

plano sem que haja cruzamento de linhas. Já as famílias livres de cruzamento admitem uma tal representação numa esfera. Essa caracterização segue da seguinte observação:

(2.10)

Fixe um elemento $s \in S$ e, para todo conjunto C de uma família \mathcal{C} livre de cruzamentos, troque C por $S \setminus C$ se $s \in C$. Então a família resultante é laminar.

2.2 Teoria dos grafos

2.2.1 Grafos não-orientados

Um *grafo* é um par $G = (V, E)$, onde V é um conjunto e E é uma família de pares não-ordenados de elementos de V . Chamamos de *vértices* os elementos de V e de *arestas* os de E .

Dado um grafo G , denotamos por $V(G)$ o conjunto dos vértices de G e por $E(G)$ o conjunto das arestas de G . Abreviamos também $n(G) := |V(G)|$ e $m(G) := |E(G)|$. Quando o grafo G está implícito no contexto, abreviaremos ainda mais, escrevendo n no lugar de $n(G)$ e m no lugar de $m(G)$.

Uma aresta $\{u, v\}$ é usualmente abreviada como uv .

Seja uv uma aresta. Dizemos que uv *liga* os vértices u e v e que u e v são as *pontas* de uv . A aresta uv é *incidente* em u e v . Como existe uma aresta ligando u e v , dizemos que u e v são *adjacentes* e que v é um *vizinho* de u .

Dado um conjunto $S \subseteq V(G)$, denotamos por $N_G(S)$ o conjunto de vértices de $V(G) \setminus S$ que têm algum vizinho em S . Quando o grafo G está implícito no contexto, abreviamos $N(S) := N_G(S)$. Se u é um vértice, abreviamos ainda $N(u) := N(\{u\})$.

Dado um vértice $u \in V(G)$, o *grau de u* é o número de arestas incidentes em u , e é denotado por $d_G(u)$. Quando o grafo G está implícito no contexto, abreviamos $d(u) := d_G(u)$. Um simples argumento de contagem mostra que

$$2m = \sum_{v \in V} d(v). \quad (2.11)$$

O grau mínimo de um vértice em G é denotado por $\delta(G)$ e o grau máximo por $\Delta(G)$. Quando $\delta(G) = \Delta(G) = k$, dizemos que o grafo G é *k -regular*.

Subgrafos, remoções e contrações

Sejam H e G grafos. Dizemos que H é um *subgrafo de G* se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$, e denotamos isso por $H \subseteq G$. Dizemos ainda que G é um *supergrafo de H* e que G *contém H* . Se $V(H) = V(G)$, então H é um *subgrafo gerador de G* . Se $E(H)$ consiste de todas as arestas de G que têm

as duas pontas em $V(H)$, então H é um *subgrafo induzido de G* ou, mais precisamente, o *subgrafo de G induzido por $V(H)$* . O subgrafo de G induzido por $S \subseteq V(G)$ é denotado por $G[S]$.

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Dado um conjunto $S \subseteq V$, o *grafo obtido a partir de G através da remoção dos vértices de S* é $G - S := G[V \setminus S]$. Se $S = \{v\}$, abreviamos $G - v := G - \{v\}$. Dado um conjunto $F \subseteq E$, o *grafo obtido a partir de G através da remoção das arestas de F* é $G - F := (V, E \setminus F)$. Se $F = \{e\}$, abreviamos $G - e := G - \{e\}$.

Dada uma aresta $e = uv \in E$, o *grafo obtido a partir de G através da contração da aresta e* é o grafo que obtemos a partir de G através da remoção da aresta uv e da identificação dos vértices u e v . Tal grafo é denotado por G/e .

Outra modificação que podemos aplicar a grafos é a adição de elementos novos, como por exemplo um vértice novo ou uma aresta nova. Neste caso, um vértice v é *novo* num grafo G se $v \notin V(G)$ e uma aresta e é *nova* em G se $e \notin E(G)$.

Camínhos, circuitos e conjuntos separadores

Um grafo da forma $v_1 \cdots v_p := (\{v_1, \dots, v_p\}, \{v_1v_2, \dots, v_{p-1}v_p\})$ é dito um *camínho*. Os vértices v_2, \dots, v_{p-1} são os *vértices internos* do camínho.

Se $P = v_1 \cdots v_p$, os vértices v_1 e v_p são as *extremidades* do camínho P . Podemos atribuir arbitrariamente uma direção ao camínho P , dizendo que ele *vai de v_1 a v_p* . Dizemos ainda que v_1 é o *início* do camínho P e v_p é o seu *término*. O camínho P *passa* ou *percorre* cada elemento de $V(P) \cup E(P)$.

O comprimento de $P = v_1 \cdots v_p$ é o número de arestas de P , ou seja, $p-1$. O camínho P é *par* se seu comprimento é par, e é *ímpar* caso contrário.

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Se $s, t \in V$, dizemos que s e t são *ligados* se G contém um camínho com extremidades s e t . Um (s, t) -*camínho* é um camínho com extremidades s e t . Se $S, T \subseteq V$, um (S, T) -*camínho* é um camínho com uma extremidade em S e outra em T .

Sejam $P = v_1 \cdots v_p$ e $Q = w_1 \cdots w_q$ camínhos. Dizemos que P e Q são *disjuntos* se $V(P) \cap V(Q) = \emptyset$, e são *internamente disjuntos nos vértices* se $(V(P) \setminus \{v_1, v_p\}) \cap (V(Q) \setminus \{w_1, w_q\}) = \emptyset$.

Seja $G = (V, E)$ um grafo e $C \subseteq V$. Sejam $S, T \subseteq V$. Se todo (S, T) -camínho em G tem um vértice em C , dizemos que C é um *conjunto de vértices (S, T) -desconector*. Sejam $s, t \in V$. Se todo (s, t) -camínho em G tem um vértice em C e $s, t \notin C$, dizemos que C é um *conjunto de vértices (s, t) -separador*.

Um grafo da forma $v_1 \cdots v_k := (\{v_1, \dots, v_k\}, \{v_0v_1, \dots, v_{k-1}v_k\})$, com $v_0 = v_k$, é dito um *círculo*. O *comprimento de um círculo* é o seu número de arestas. Dizemos que um círculo C *passa* ou *percorre* cada elemento de $V(C) \cup E(C)$. Um círculo é dito *par* se seu comprimento é par, e é *ímpar* caso contrário.

Conexidade e componentes

Um grafo G é *conexo* se cada par de vértices é ligado por algum caminho. Um subgrafo conexo maximal de G é dito um *componente conexo* de G , ou simplesmente um *componente* de G .

Árvores, florestas e cortes

Um grafo G é uma *floresta* se G não tem circuitos. Dizemos ainda que G é *acíclico*. Uma *árvore* é uma floresta conexa. É fácil provar o seguinte resultado:

Teorema 2.3

Seja $G = (V, E)$ um grafo. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) G é uma árvore;
- (ii) G é conexo e $|E| = |V| - 1$;
- (iii) G é acíclico e $|E| = |V| - 1$.

Dado um grafo G , uma árvore $T \subseteq G$ é *geradora* se $V(T) = V(G)$. É evidente que G tem uma árvore geradora se, e somente se, G é conexo. Seja $S \subseteq V(G)$. O conjunto de todas as arestas de G que tem exatamente uma ponta em S é denotado por $\delta_G(S)$. Um conjunto $F \subseteq E(G)$ é um *corte* de G se $F = \delta_G(S)$ para algum $S \subseteq V(G)$.

Uma aresta e de G é uma *ponte* se $\{e\}$ é um corte de G .

Grafos bipartidos

Um grafo $G = (V, E)$ é *bipartido* se existe uma partição $\{U, W\}$ de V tal que $E = \delta_G(U)$. Chamamos os conjuntos U e W de *classes de cores de G* e dizemos que G é um grafo (U, W) -bipartido. Note, entretanto, que as classes de cores U e W de um grafo bipartido podem não ser únicas.

Dados conjuntos U e W , definimos o *grafo bipartido completo entre U e W* como $K_{U,W} := (U \cup W, \{uw : u \in U, w \in W\})$.

É fácil provar a seguinte boa caracterização de grafos bipartidos:

Teorema 2.4

Seja G um grafo. Então G é bipartido se, e somente se, G não tem circuitos ímpares.

A seguinte propriedade será útil mais tarde:

Lema 2.5

Seja G um grafo (U, W) -bipartido. Então a função $N(S)$, definida sobre todos os subconjuntos $S \subseteq U$, é submodular, isto é,

$$|N(X \cup Y)| + |N(X \cap Y)| \leq |N(X)| + |N(Y)|. \quad (2.12)$$

Demonstração: Sejam $X, Y \subseteq U$. É fácil ver que $N(X \cup Y) = N(X) \cup N(Y)$ e que $N(X \cap Y) \subseteq N(X) \cap N(Y)$. Logo,

$$\begin{aligned} |N(X \cup Y)| + |N(X \cap Y)| &\leq |N(X) \cup N(Y)| + |N(X) \cap N(Y)| \\ &= |N(X)| + |N(Y)|, \end{aligned}$$

como queríamos. □

Emparelhamentos, coberturas por vértices e coloração de arestas

Seja $G = (V, E)$ um grafo e $M \subseteq E$. Dizemos que M é um *emparelhamento* se $e \cap f = \emptyset$ para quaisquer arestas $e, f \in M$ distintas. Um vértice $v \in V$ é *saturado por M* se $v \in \bigcup_{e \in M} e$. Dizemos que M é um *emparelhamento perfeito* se todo vértice de G é saturado por M .

Um emparelhamento de tamanho máximo em G é um *emparelhamento máximo* em G . O tamanho de um emparelhamento máximo em G é denotado por $\nu(G)$.

Fixe um emparelhamento M em G . Seja P um caminho em G . Dizemos que P é *M -alternante* se as arestas de P estão alternadamente em M e fora de M . Se P é M -alternante e as duas extremidades de P não são saturadas por M , então P é dito um caminho *M -aumentador*. É fácil ver que

$$\begin{aligned} \text{se } P \text{ é um caminho } M\text{-aumentador em } G, \text{ então o con-} & \quad (2.13) \\ \text{junto } M' := M \triangle E(P) \text{ é um emparelhamento em } G & \\ \text{com } |M'| = |M| + 1. & \end{aligned}$$

Um conjunto de vértices $K \subseteq V$ é uma *cobertura por vértices* em G se cada aresta de G tem uma ponta em K ou, equivalentemente, se $G - K$ não tem arestas. Um vértice v *cobre* uma aresta e se v é uma ponta de e . Um conjunto $S \subseteq V$ *cobre* uma aresta e se algum vértice de S cobre e .

Uma cobertura por vértices de tamanho mínimo em G é uma *cobertura mínima por vértices* em G . O tamanho de uma cobertura mínima por vértices em G é denotado por $\tau(G)$.

Uma *coloração de arestas* de G é uma partição de E em emparelhamentos, digamos $\chi' = \{M_1, \dots, M_k\}$. Cada um desses emparelhamentos é dito uma *cor* ou *classe de cor* da coloração χ' . O tamanho da menor coloração de arestas de G é chamado de *índice cromático* de G e é denotado $\chi'(G)$. É evidente que

$$\chi'(G) \geq \Delta(G). \quad (2.14)$$

Grafos planares e dualidade

Seja $G = (V, E)$ um grafo. O *grafo topológico* $|G|$ associado a G é o espaço topológico que consiste de V e, para cada aresta e de G , uma curva $|e|$ conectando as pontas de e , de modo que, para quaisquer arestas e, f , vale que $|e| \cap |f| = e \cap f$.

Uma *imersão* de um grafo G num espaço topológico S é uma imersão (injeção contínua) do grafo topológico $|G|$ em S . Um grafo G é dito *planar* se admite uma imersão no plano \mathbb{R}^2 .

Quando trabalhamos com grafos planares, assumimos que já temos fixa uma imersão no plano.

Seja G um grafo planar. Os componentes topológicos de $\mathbb{R}^2 \setminus |G|$ são as *faces* de G . Dizemos que uma aresta *incide* em uma face F se está contida na fronteira de F . Se duas faces F e F' são incidentes em uma aresta e , dizemos que e *separa* F e F' .

O *grafo dual* G^* de um grafo planar $G = (V, E)$ é o grafo que tem como conjunto de vértices as faces de G e que tem, para cada aresta $e \in E$, uma aresta correspondente e^* ligando as duas faces incidentes em e . Note que G^* também é planar e, se G é conexo, então $(G^*)^* = G$.

Matriz de incidência

Seja $G = (V, E)$ um grafo. A *matriz de incidência* de G , ou *matriz de incidência* $V \times E$ de G , é a matriz $V \times E$ dada por

$$M_{v,e} := \begin{cases} 1, & \text{se } v \text{ é uma ponta de } e; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.15)$$

2.2.2 Grafos orientados

Um *grafo orientado* é um par $D = (V, A)$, onde V é um conjunto e A é uma família de pares ordenados de elementos de V . Chamamos de *vértices* os elementos de V e de *arcos* os de A .

Dado um grafo orientado D , denotamos por $V(D)$ o conjunto dos vértices de D e por $A(D)$ o conjunto dos arcos de D . Abreviamos ainda $n(D) := |V(D)|$ e $m(D) := |A(D)|$. Quando o grafo orientado D está implícito no contexto, abreviaremos ainda mais, escrevendo n no lugar de $n(D)$ e m no lugar de $m(D)$.

Um arco (u, v) é usualmente abreviado como uv . Dizemos que o arco uv *liga* o vértice u ao vértice v e que u e v são as *pontas* do arco uv . Mais especificamente, u é a *ponta inicial* e v é a *ponta final* do arco (u, v) . Dizemos ainda que o arco (u, v) *incide* em u e em v .

Utilizamos o termo ‘família’ na definição do conjunto A para indicar que podem ocorrer diversos arcos do mesmo tipo, isto é, entre os mesmos pares

de vértices. Arcos que ligam os mesmos pares de vértices são chamados de *arcos paralelos*.

Cada grafo orientado $D = (V, A)$ tem associado um *grafo subjacente* G , obtido a partir de D ignorando-se a orientação de cada arco. Dizemos ainda que D é uma *orientação* de G .

Um grafo orientado é uma *árvore orientada* se seu grafo subjacente é uma árvore.

Dado um arco $a = (u, v)$, o *arco reverso* de a é $a^{-1} := (v, u)$.

O *grafo dos arcos* de um grafo orientado $D = (V, A)$ é o grafo orientado com conjunto de vértices A e com conjunto de arcos

$$\left\{ ((u, v), (x, y)) : (u, v), (x, y) \in A, v = x \right\}. \quad (2.16)$$

Subgrafos, remoções e contrações

Sejam D e D' grafos orientados. Dizemos que D' é um *subgrafo de* D se $V(D') \subseteq V(D)$ e $A(D') \subseteq A(D)$, e denotamos isso por $D' \subseteq D$. Dizemos ainda que D é um *supergrafo de* D' e que D *contém* D' . Se $V(D') = V(D)$, então D' é um *subgrafo gerador de* D . Se $A(D')$ consiste de todos os arcos de D que têm as duas pontas em $V(D')$, então D' é um *subgrafo induzido de* D ou, mais precisamente, o *subgrafo de* D *induzido por* $V(D')$. O subgrafo de D induzido por $S \subseteq V(D)$ é denotado por $D[S]$.

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado. Dado um conjunto $S \subseteq V$, o *grafo obtido a partir de* D *através da remoção dos vértices de* S é $D - S := D[V \setminus S]$. Se $S = \{v\}$, abreviamos $D - v := D - \{v\}$. Dado um conjunto $B \subseteq A$, o *grafo obtido a partir de* D *através da remoção dos arcos de* B é $D - B := (V, A \setminus B)$. Se $B = \{a\}$, abreviamos $D - a := D - \{a\}$.

Dado um arco $a = (u, v) \in A$, o *grafo obtido a partir de* D *através da contração do arco* a é o grafo orientado que obtemos a partir de D através da remoção do arco a e da identificação dos vértices u e v . Tal grafo é denotado por D/a .

Outra modificação que podemos aplicar a grafos orientados é a adição de elementos novos, como por exemplo um vértice novo ou um arco novo. Neste caso, um vértice v é *novo* num grafo D se $v \notin V(D)$ e um arco a é *novo* em D se $a \notin A(D)$.

Dado um conjunto $S \subseteq V$, o *grafo obtido a partir de* D *através da contração dos vértices de* S é o grafo orientado que obtemos a partir de D através da remoção dos arcos que têm as duas pontas em S e da identificação de todos os vértices de S a um vértice novo, chamado S , sendo que arcos (u, v) , com $u \in S$, são redefinidos como (S, v) , e arcos (u, v) , com $v \in S$, são redefinidos como (u, S) .

Caminhos, circuitos e conjuntos separadores

Um grafo orientado da forma $v_1 \cdots v_p := (\{v_1, \dots, v_p\}, \{a_1, \dots, a_{p-1}\})$, onde $a_i := (v_i, v_{i+1})$ para $i = 1, \dots, p-1$, é dito um *caminho*. Os vértices v_2, \dots, v_{p-1} são os *vértices internos* do caminho.

Se $P = v_1 \cdots v_p$, os vértices v_1 e v_p são as *extremidades* do caminho P . Dizemos que P *vai de* v_1 *a* v_p . Dizemos ainda que v_1 é o *início* do caminho P e v_p é o seu *término*. O caminho P *passa* ou *percorre* cada elemento de $V(P) \cup A(P)$.

O comprimento de $P = v_1 \cdots v_p$ é o número de arcos de P , ou seja, $p-1$.

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado. Se $s, t \in V$, dizemos que t é *acessível a partir de* s se P contém um caminho de s a t . Um caminho que vai de s a t é um (s, t) -*caminho*. Se $S, T \subseteq V$, um (S, T) -*caminho* é um caminho que inicia em um vértice de S e termina em um vértice de T .

Sejam $P = v_1 \cdots v_p$ e $Q = w_1 \cdots w_q$ caminhos. Dizemos que P e Q são *disjuntos* se $V(P) \cap V(Q) = \emptyset$, são *internamente disjuntos nos vértices* se $(V(P) \setminus \{v_1, v_p\}) \cap (V(Q) \setminus \{w_1, w_q\}) = \emptyset$, e são *disjuntos nos arcos* se $A(P) \cap A(Q) = \emptyset$.

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado e $C \subseteq V$. Sejam $S, T \subseteq V$. Se todo (S, T) -caminho em D tem um vértice em C , dizemos que C é um *conjunto de vértices* (S, T) -*desconector*. Sejam $s, t \in V$. Se todo (s, t) -caminho em D tem um vértice em C e $s, t \notin C$, dizemos que C é um *conjunto de vértices* (s, t) -*separador*.

Um grafo orientado da forma $v_1 \cdots v_k := (\{v_1, \dots, v_k\}, \{a_1, \dots, a_k\})$, com $v_0 = v_k$ e $a_i := v_i v_{i+1}$ para $i = 1, \dots, k-1$, é dito um *circuito*. O *comprimento de um circuito* é o seu número de arcos. Dizemos que um circuito C *passa* ou *percorre* cada elemento de $V(C) \cup A(C)$.

Cortes e quebra-circuitos

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado e $U \subseteq V$. Dizemos que um arco a *entra em* U se a ponta inicial de a está fora de U e a ponta final de a está em U . Dizemos que um arco *sai de* U se entra em $V \setminus U$. O conjunto dos arcos de D que entram em U é denotado por $\delta_D^{\text{in}}(U)$. Denotamos ainda $d_D^{\text{in}}(U) := |\delta_D^{\text{in}}(U)|$. O conjunto dos arcos de D que saem de U é denotado por $\delta_D^{\text{out}}(U)$, sendo que $d_D^{\text{out}}(U) := |\delta_D^{\text{out}}(U)|$. Quando o grafo orientado D está implícito no contexto, abreviamos $\delta^{\text{in}}(U) := \delta_D^{\text{in}}(U)$, $\delta^{\text{out}}(U) := \delta_D^{\text{out}}(U)$, $d^{\text{in}}(U) := d_D^{\text{in}}(U)$ e $d^{\text{out}}(U) := d_D^{\text{out}}(U)$.

Seja $B \subseteq A$. Denotamos por $\delta_B^{\text{in}}(U)$ o conjunto de arcos de B que entram em U e por $\delta_B^{\text{out}}(U)$ o conjunto de arcos de B que saem de U . Temos ainda $d_B^{\text{in}}(U) := |\delta_B^{\text{in}}(U)|$ e $d_B^{\text{out}}(U) := |\delta_B^{\text{out}}(U)|$.

O seguinte fato será de extrema importância nos capítulos a seguir:

Lema 2.6

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado. Então a função $d^{\text{in}}(S)$, definida sobre todos os subconjuntos $S \subseteq V(D)$, é submodular, isto é,

$$d^{\text{in}}(X \cup Y) + d^{\text{in}}(X \cap Y) \leq d^{\text{in}}(X) + d^{\text{in}}(Y). \quad (2.17)$$

O mesmo vale para a função $d^{\text{out}}(S)$.

Demonstração: Faremos apenas a prova para a função $d^{\text{in}}(S)$. O caso da função $d^{\text{out}}(S)$ é absolutamente análogo.

Começamos notando que $\delta^{\text{in}}(X)$ pode ser particionado em

$$\{\delta^{\text{in}}(X \cup Y) \cap \delta^{\text{in}}(X), \delta^{\text{out}}(Y \setminus X) \cap \delta^{\text{in}}(X \setminus Y), \delta^{\text{out}}(Y \setminus X) \cap \delta^{\text{in}}(X \cap Y)\}.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} d^{\text{in}}(X) + d^{\text{in}}(Y) &\geq |\delta^{\text{in}}(X \cup Y) \cap \delta^{\text{in}}(X)| + |\delta^{\text{in}}(X \cup Y) \cap \delta^{\text{in}}(Y)| \\ &\quad + |\delta^{\text{out}}(Y \setminus X) \cap \delta^{\text{in}}(X \cap Y)| \\ &\quad + |\delta^{\text{out}}(X \setminus Y) \cap \delta^{\text{in}}(X \cap Y)|. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Agora, $\delta^{\text{in}}(X \cup Y) \subseteq \delta^{\text{in}}(X) \cup \delta^{\text{in}}(Y)$, de modo que

$$\begin{aligned} |\delta^{\text{in}}(X \cup Y) \cap \delta^{\text{in}}(X)| + |\delta^{\text{in}}(X \cup Y) \cap \delta^{\text{in}}(Y)| &= \\ |\delta^{\text{in}}(X \cup Y)| + |\delta^{\text{in}}(X \cup Y) \cap \delta^{\text{in}}(X) \cap \delta^{\text{in}}(Y)|. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ademais, $\delta^{\text{in}}(X \cap Y)$ pode ser particionado em

$$\{\delta^{\text{in}}(X \cup Y) \cap \delta^{\text{in}}(X) \cap \delta^{\text{in}}(Y), \delta^{\text{out}}(Y \setminus X) \cap \delta^{\text{in}}(X \cap Y), \delta^{\text{out}}(X \setminus Y) \cap \delta^{\text{in}}(X \cap Y)\}. \quad (2.20)$$

Combinando (2.18), (2.19) e (2.20), obtemos

$$\begin{aligned} d^{\text{in}}(X) + d^{\text{in}}(Y) &\geq |\delta^{\text{in}}(X \cup Y)| + |\delta^{\text{in}}(X \cup Y) \cap \delta^{\text{in}}(X) \cap \delta^{\text{in}}(Y)| \\ &\quad + |\delta^{\text{out}}(Y \setminus X) \cap \delta^{\text{in}}(X \cap Y)| \\ &\quad + |\delta^{\text{out}}(X \setminus Y) \cap \delta^{\text{in}}(X \cap Y)| \\ &= d^{\text{in}}(X \cup Y) + d^{\text{in}}(X \cap Y), \end{aligned}$$

como queríamos. □

Um *corte* é um conjunto da forma $\delta^{\text{out}}(S)$ para algum $S \subseteq V$. Dados vértices s, t , um (s, t) -corte é um conjunto da forma $\delta^{\text{out}}(S)$ para algum $\{s\} \subseteq S \subseteq V \setminus \{t\}$.

Um *quebra-circuitos* é um conjunto F de arcos tal que $D - F$ não tem circuitos.

Conexidade, componentes fortes e fracos

Um grafo orientado $D = (V, A)$ é dito *fortemente conexo* se, para quaisquer vértices u e v , existe um (u, v) -caminho em D . Dizemos que D é *fracamente conexo* se o grafo subjacente a D é conexo.

Um subgrafo fortemente conexo maximal de D é um *componente fortemente conexo* ou *componente forte* de D . Um *componente fracamente conexo* ou *componente fraco* de D é um subgrafo de D cujo grafo subjacente é um componente do grafo subjacente a D .

Um arco a é um *arco de corte* se a aresta correspondente ao arco a no grafo subjacente a D é uma ponte.

Grafos orientados planares e dualidade

Um grafo orientado D é *planar* se seu grafo subjacente G é planar. O grafo *dual* de D é o grafo orientado D^* obtido da seguinte orientação de G^* . Se um arco $a = (u, v)$ de D separa as faces F e F' tal que, ao percorrermos a de u até v , a face F está à esquerda e F' à direita de a , então o arco dual de a é orientado de F para F' .

Note que, se $D = (V, A)$ é fracamente conexo, então $(D^*)^* = (V, A^{-1})$, onde $A^{-1} := \{a^{-1} : a \in A\}$.

Matriz de incidência

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado. A *matriz de incidência* de D , ou *matriz de incidência* $V \times A$ de D , é a matriz $V \times A$ dada por

$$M_{v,a} := \begin{cases} -1, & \text{se } v \text{ é a ponta inicial de } a; \\ +1, & \text{se } v \text{ é a ponta final de } a; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.21)$$

2.3 Programação linear e inteira

2.3.1 Convexidade, sistemas e poliedros

Sejam $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é uma *combinação convexa* de x_1, \dots, x_k se existem $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tais que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ e $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$.

Um subconjunto C de \mathbb{R}^n é dito *convexo* se, para quaisquer $x, y \in C$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ com $0 \leq \lambda \leq 1$, vale que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$.

O *fecho convexo* de um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$, denotado $\text{fecho.conv}(S)$, é o conjunto de todas as combinações convexas de elementos de S ou, equivalentemente, é o menor subconjunto convexo de \mathbb{R}^n que contém S .

Seja A uma matriz e sejam x e b vetores. Quando escrevemos $Ax = b$, $Ax \leq b$, etc., assumimos implicitamente a compatibilidade de dimensões. Chamamos $Ax \leq b$ de um *sistema de inequações lineares*.

Um subconjunto P de \mathbb{R}^n é um *poliedro* se existem uma matriz A e vetores x e b tais que

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}. \quad (2.22)$$

Se (2.22) vale, dizemos que o sistema $Ax \leq b$ *determina* o poliedro P . Uma inequação $c^\top x \leq \delta$ é chamada *válida para P* se $c^\top x \leq \delta$ para todo $x \in P$.

Um subconjunto P de \mathbb{R}^n é um *politopo* se P é o fecho convexo de um número finito de vetores de \mathbb{R}^n . É um fato bem conhecido que um subconjunto P de \mathbb{R}^n é um politopo se, e somente se, P é um poliedro limitado, ou seja, se existe $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $|x_i| \leq M$ para quaisquer $x \in P$ e $i \in \{1, \dots, n\}$.

Um poliedro é dito *racional* se é determinado por um sistema racional de inequações lineares, isto é, um sistema com todas as entradas racionais. Neste texto, todos os poliedros são racionais.

2.3.2 Programação linear e dualidade

Um problema de programação linear consiste em maximizar ou minimizar uma função linear sobre um poliedro. Por exemplo,

$$\max\{c^\top x : Ax \leq b\}. \quad (2.23)$$

Teorema 2.7 (Teorema da dualidade de programação linear)

Seja A uma matriz e sejam b e c vetores. Então

$$\max\{c^\top x : Ax \leq b\} = \min\{y^\top b : y \geq 0 \text{ e } y^\top A = c^\top\} \quad (2.24)$$

se pelo menos um dos dois valores ótimos acima é finito.

Na equação (2.24), o problema de minimização é chamado de *problema dual* do problema de maximização, que por sua vez é chamado de *problema primal*. É fácil ver que o problema primal é o dual do problema dual.

Há diversas formas de enunciar o teorema da dualidade, dependendo de como está descrito o problema primal. As regras para geração do programa dual a partir do primal estão resumidas na seguinte tabela:

maximizar	minimizar
\leq restrição	variável ≥ 0
\geq restrição	variável ≤ 0
$=$ restrição	variável irrestrita
variável ≥ 0	\geq restrição
variável ≤ 0	\leq restrição
variável irrestrita	$=$ restrição
lado direito	função objetivo
função objetivo	lado direito

Soluções viáveis, otimalidade e vértices

Seja P um poliedro. Considere o problema de programação linear

$$\max\{c^\top x : x \in P\}. \quad (2.25)$$

Dizemos que o problema (2.25) é *inviável* se $P = \emptyset$. Caso contrário, o problema (2.25) é *viável*. Todo vetor de P é chamado de *solução viável* do problema (2.25). Um vetor $x^* \in P$ que atinge o máximo em (2.25) é dita uma *solução ótima* do problema (2.25). Um vetor y é uma *solução dual* se é viável no problema dual.

Um vetor $x \in P$ é um *vértice* de P se x não é combinação convexa de outros vetores de P , isto é, para quaisquer $y, z \in P$ distintos e qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, com $0 \leq \lambda \leq 1$, temos $x \neq \lambda y + (1 - \lambda)z$. É um fato bem conhecido que o máximo em (2.25) sempre é atingido por um vértice de P .

Um poliedro P é dito *integral* se for o fecho convexo dos vetores integrais contidos em P . Assim, um politopo P é integral se, e somente se, cada vértice de P é integral.

Folgas complementares

Vale a seguinte caracterização de soluções ótimas no primal e no dual:

Teorema 2.8 (Folgas complementares)

Sejam x, y um par de soluções viáveis nos problemas lineares de (2.24). Então x é solução ótima no primal e y é solução ótima no dual se, e somente se, $(Ax)_i = b_i$ para cada i tal que $y_i > 0$.

Algoritmos para programação linear

O algoritmo mais famoso para resolver problemas de programação linear é o método simplex, desenvolvido por Dantzig [Dan51]. Ele funciona muito bem na prática. Porém, não foi provado nenhum limitante polinomial de seu consumo de tempo no pior caso, e a maioria das regras de seleção de pivô propostas provaram consumir tempo exponencial no pior caso.

O primeiro algoritmo polinomial para problemas de programação linear foi dado por Khachiyan [Hač79, Hač80], adaptando o método das elipsóides de programação não-linear, originalmente desenvolvido por Shor [Šor70a, Šor70b, Šor77] e por Yudin e Nemirovskii [JN76]. O método consiste em encontrar uma seqüência de elipsóides, cada um menor que o anterior, sendo que cada elipsóide sempre contém pelo menos uma solução ótima. O método termina quando o elipsóide fica pequeno o suficiente para que seja possível derivar uma solução ótima. Na prática, esse algoritmo é bastante pesado e lento. Porém, há poderosas conseqüências teóricas, como mostraram Karp e Papadimitriou [KP80, KP82], Padberg e Rao [PR80], e Grötschel, Lovász e Schrijver [GLS88].

Karmarkar [Kar84] mostrou que métodos de pontos interiores podem resolver problemas de programação linear em tempo polinomial, e também que tais métodos podem ser implementados de forma eficiente, a ponto de serem competitivos com o método simplex.

2.3.3 Teoria de poliedros bloqueadores

Seja P um poliedro. Definimos

$$P^\uparrow := P + \mathbb{R}_{\geq 0}^n. \quad (2.26)$$

O poliedro P^\uparrow é chamado o *dominante* de P .

Um poliedro P é dito *do tipo bloqueador* se, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$ com $y \geq x$ e $x \in P$, vale que $y \in P$.

Sejam \mathcal{B}, \mathcal{C} um par de anticadeias bloqueadoras sobre um conjunto E . Seja $P_{\mathcal{B}}$ o poliedro determinado por

$$\begin{aligned} x_e &\geq 0 && \text{para todo } e \in E, \\ x(C) &\geq 1 && \text{para todo } C \in \mathcal{C} \end{aligned} \quad (2.27)$$

e seja $P_{\mathcal{C}}$ o poliedro determinado por

$$\begin{aligned} x_e &\geq 0 && \text{para todo } e \in E, \\ x(B) &\geq 1 && \text{para todo } B \in \mathcal{B}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

A prova do seguinte fato pode ser vista na tese de Marcus [Mar92]:

Teorema 2.9 (Teoria de poliedros bloqueadores)

O poliedro $P_{\mathcal{B}}$ é integral se, e somente se, o poliedro $P_{\mathcal{C}}$ é integral.

2.3.4 Unimodularidade total

Uma matriz A é chamada *totalmente unimodular* se toda submatriz quadrada de A tem determinante 0, +1 ou -1. Em particular, cada entrada de A deve estar em $\{0, \pm 1\}$.

Uma forma alternativa de caracterizar matrizes totalmente unimodulares torna mais claro o nosso interesse nessas matrizes. Dizemos que uma matriz é *integral* se todas suas entradas são números inteiros. Então uma matriz A é totalmente unimodular se, e somente se, cada submatriz não-singular de A tem como inversa uma matriz integral. Com isso, é possível provar o seguinte resultado:

Teorema 2.10

Seja A uma matriz $m \times n$ totalmente unimodular e $b \in \mathbb{Z}^m$. Então o poliedro $P = \{x : Ax \leq b\}$ é integral.

Corolário 2.10.1

Seja A uma matriz $m \times n$ totalmente unimodular, $b \in \mathbb{Z}^m$ e $c \in \mathbb{Z}^n$. Então ambos os programas lineares na equação de dualidade (2.24) têm soluções ótimas integrais, se os ótimos são finitos.

2.3.5 Matrizes de rede

Seja $D = (V, A_D)$ um grafo orientado e $T = (V, A_T)$ uma árvore orientada. Seja C a matriz $A_T \times A_D$ definida da seguinte forma. Seja $a_T \in A_T$ e $a_D = (u, v) \in A_D$. Seja P o subgrafo orientado de T cujo grafo subjacente é um (u, v) -caminho. Vamos considerar P como um caminho que inicia em u e que termina em v , de modo que arcos “na direção correta” têm a ponta inicial mais próxima de u do que sua ponta final, e arcos “na direção errada” têm a ponta final mais próxima de u do que sua ponta inicial. Tome

$$C(a_T, a_D) := \begin{cases} +1, & \text{se } a_T \text{ ocorre “na direção correta”;} \\ -1, & \text{se } a_T \text{ ocorre “na direção errada”;} \\ 0, & \text{se } a_T \text{ não ocorre em } P. \end{cases} \quad (2.29)$$

A matriz C assim definida é chamada uma *matriz de rede, gerada por T e D* .

Lema 2.11

Toda submatriz de uma matriz de rede é novamente uma matriz de rede.

Demonstração: Seja C uma matriz de rede, gerada por T e D . A remoção da coluna de C indexada por a_D corresponde a remover o arco a_D do grafo D . A remoção da linha de C indexada por $a_T = (u, v)$ corresponde a contrair o arco a_T em T e identificar os vértices u e v no grafo orientado D . \square

Agora podemos provar a unimodularidade total de matrizes de rede:

Teorema 2.12

Seja C uma matriz de rede. Então C é totalmente unimodular.

Demonstração: Pelo lema 2.11, basta mostrarmos que, se C é uma matriz de rede, gerada por $T = (V, A_T)$ e $D = (V, A_D)$, e C é quadrada, então $\det(C) \in \{0, \pm 1\}$. A prova é por indução no número de linhas de C . O caso em que C só tem uma linha é trivialmente verdadeiro.

Suponha então que C tem mais de uma linha. Se $\det(C) = 0$, estamos feitos. Suponha então que $\det(C) \neq 0$. Seja u um vértice de T que é ponta de um único arco de A_T . Seja a' tal arco.

Observe que alterar a orientação de algum arco de T ou de D é equivalente a multiplicar alguma linha ou coluna de C por -1 , o que altera apenas o sinal do determinante. Assim, possivelmente invertendo a orientação de alguns arcos, podemos supor que cada arco de A_D e de A_T incidente em u tem u como ponta inicial. Assim, a matriz C tem apenas 0's e 1's na linha indexada por a' .

Considere duas colunas indexadas por arcos $a_1 = (u, v_1)$ e $a_2 = (u, v_2)$, isto é, duas colunas cuja entrada indexada por a' é 1. Então a subtração da coluna a_1 da coluna a_2 equivale a transformar a_2 no arco (v_1, v_2) . Ademais,

tal subtração não altera o determinante de C . Podemos supor então que existe exatamente um arco de A_D incidente em u , de modo que a linha de C indexada por a' tem um único elemento não-nulo. Agora o resultado segue da expansão do determinante através da linha indexada por a' combinada com a hipótese de indução. \square

Corolário 2.12.1

Seja $G = (V, E)$ um grafo (U, W) -bipartido. Então a matriz de incidência $V \times E$ de G é totalmente unimodular.

Demonstração: Adicione um vértice novo v a G , obtendo o grafo G' .

Orienta cada aresta uw de G' , com $u \in U$ e $w \in W$, de u para w , obtendo assim um grafo orientado D . Crie também uma árvore orientada T , com conjunto de vértices $V(G')$ e arcos (u, v) para todo $u \in U$ e (v, w) para todo $w \in W$.

É fácil ver que a matriz de incidência $V \times E$ de G é idêntica à matriz de rede gerada por T e D . Agora o resultado segue do teorema 2.12. \square

Corolário 2.12.2

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado. Então a matriz de incidência $V \times A$ de D é totalmente unimodular.

Demonstração: Adicione um vértice novo u a D , obtendo o grafo orientado D' . Crie uma árvore orientada T com conjuntos de vértices $V(D')$ e arcos (u, v) para todo $v \in V$.

É fácil ver que a matriz de incidência $V \times A$ de D é idêntica à matriz de rede gerada por T e D' . Agora o resultado segue do teorema 2.12. \square

2.3.6 Total dual integralidade

Edmonds e Giles [EG77] introduziram o seguinte conceito. Um sistema $Ax \leq b$ em n dimensões é dito *totalmente dual integral*, ou TDI, se A e b são racionais e, para qualquer $c \in \mathbb{Z}^n$, o problema dual de maximizar $c^\top x$ sobre $Ax \leq b$, que é

$$\min\{y^\top b: y \geq 0 \text{ e } y^\top A = c^\top\}, \tag{2.30}$$

tem uma solução ótima integral y , se for finito.

Teorema 2.13

Se $Ax \leq b$ é TDI e b é integral, então o sistema $Ax \leq b$ determina um poliedro integral.

O resultado a seguir mostra que a transformação duma restrição de desigualdade numa restrição de igualdade preserva a total dual integralidade de um sistema:

Teorema 2.14

Seja $Ax \leq b$ um sistema TDI e suponha que o sistema $A'x \leq b'$ é obtido de $Ax \leq b$ adicionando-se a inequação $-a^\top x \leq -\beta$ para alguma inequação $a^\top x \leq \beta$ de $Ax \leq b$. Então o sistema $A'x \leq b'$ também é TDI.

Um sistema $Ax \leq b$ é chamado *box-TDI* se o sistema $d \leq x \leq c, Ax \leq b$ é TDI para quaisquer vetores $d, c \in \mathbb{R}^n$.

Pelo teorema 2.13, podemos provar o seguinte fato: se $Ax \leq b$ é box-TDI, então o poliedro $\{x: d \leq x \leq c \text{ e } Ax \leq b\}$ é integral para quaisquer vetores integrais d e c .

Teorema 2.15

Seja $Ax \leq b$ um sistema de inequações lineares, onde A é uma matriz $m \times n$. Suponha que, para cada $c \in \mathbb{Z}^n$, o problema de programação linear $\max\{c^\top x: Ax \leq b\}$ tem, se finito, uma solução ótima dual $y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ tal que as linhas de A correspondentes a componentes positivos de y formam uma matriz totalmente unimodular. Então o sistema $Ax \leq b$ é box-TDI.

Capítulo 3

Alguns resultados clássicos equivalentes

Neste capítulo apresentaremos algumas relações min-max clássicas, como o teorema de emparelhamentos de Kőnig, o teorema do casamento de Hall, o teorema de Menger sobre caminhos disjuntos e cortes, e o teorema do fluxo máximo e corte mínimo de Ford-Fulkerson. Esses resultados estão entre as primeiras relações min-max provadas em otimização combinatória.

As provas expostas são puramente combinatórias. A demonstração do teorema do fluxo máximo e corte mínimo de Ford-Fulkerson, porém, é também algorítmica. O algoritmo sugerido, com uma leve modificação, é o famoso algoritmo de Edmonds-Karp, que provamos ser fortemente polinomial.

Na última seção, provamos que os resultados anteriores são todos equivalentes, no sentido de que cada um pode ser provado a partir do outro. As reduções apresentadas mostrarão como o algoritmo de Edmonds-Karp pode ser utilizado para os teoremas anteriores.

3.1 O teorema de emparelhamentos de Kőnig

Seja G um grafo, M um emparelhamento em G e K uma cobertura por vértices em G . É evidente que

$$|M| \leq |K|, \tag{3.1}$$

já que K deve conter ao menos uma ponta de cada aresta de M . Em particular, a relação (3.1) vale para qualquer emparelhamento máximo e qualquer cobertura mínima por vértices, ou seja,

$$\nu(G) \leq \tau(G). \tag{3.2}$$

Não é verdade que a relação (3.2) sempre vale com igualdade. De fato, ela é estrita para qualquer circuito ímpar. Porém, vale a igualdade em (3.2) sempre que G não tem circuitos ímpares, como mostrou Kőnig [Kőn31]:

Teorema 3.1 (Teorema de emparelhamentos de Kőnig)

Seja G um grafo bipartido. Então

$$\nu(G) = \tau(G). \quad (3.3)$$

Isto é, o tamanho máximo de um emparelhamento é igual ao tamanho mínimo de uma cobertura por vértices.

Demonstração (Rizzi [Riz00]): Seja $G = (V, E)$ um contra-exemplo com $|V| + |E|$ mínimo. Então G tem um vértice u de grau pelo menos 3. De fato, se $\Delta(G) \leq 2$, então os componentes de G são circuitos pares e caminhos, e é fácil encontrar em tais grafos um emparelhamento e uma cobertura de mesmo tamanho.

Seja v um vizinho de u . Pela minimalidade de G , existe uma cobertura por vértices K em $G - v$ de tamanho $\nu(G - v)$. Como G é um contra-exemplo e $K \cup \{v\}$ é uma cobertura por vértices em G , é claro que $|K \cup \{v\}| \geq \nu(G) + 1$ e portanto $\nu(G - v) = |K| \geq \nu(G)$. Logo, existe um emparelhamento máximo M em G que não satura v . De fato, qualquer emparelhamento máximo de $G - v$ é dessa forma.

Seja $f \in E \setminus M$ uma aresta incidente em u distinta de uv . Tal aresta existe pois $d(u) \geq 3$. Como $f \notin M$, então $\nu(G - f) \geq |M| = \nu(G)$. Pela minimalidade de G , existe uma cobertura por vértices K' em $G - f$ de tamanho $\nu(G - f) = |M|$. Mas como M é um emparelhamento em $G - f$ que não satura v , então $v \notin K'$, já que $|K'| = |M|$ implica que cada vértice de K' é ponta de exatamente uma aresta em M . Logo, $u \in K'$, pois K' cobre a aresta uv de $G - f$. Mas então K' também cobre f , e é portanto uma cobertura por vértices de G de tamanho $\nu(G)$. \square

Notamos que a prova original de Kőnig [Kőn31], que pode ser vista em [Sch03a, pág. 265], era essencialmente algorítmica, utilizando caminhos aumentadores. Ela mostra como obter uma cobertura mínima por vértices a partir de um emparelhamento máximo. Dado um emparelhamento máximo, uma tal cobertura pode ser facilmente construída em tempo $O(m)$.

Hopcroft e Karp [HK73] mostraram como implementar um algoritmo para encontrar um emparelhamento máximo e uma cobertura mínima por vértices num grafo bipartido $G = (V, E)$, utilizando caminhos aumentadores bloqueadores, de modo que o consumo de tempo seja $O(\sqrt{nm})$.

Poliedricamente, o teorema de emparelhamentos de Kőnig afirma que existem soluções ótimas integrais para o par dual de problemas de programação linear

$$\max \{ \mathbf{1}^\top x : x \geq 0, Ax \leq \mathbf{1} \} = \min \{ y^\top \mathbf{1} : y \geq 0, y^\top A \geq \mathbf{1}^\top \}, \quad (3.4)$$

onde A é a matriz de incidência $V \times E$ do grafo G . Esse resultado também segue da unimodularidade total da matriz A quando o grafo G é bipartido.

Obtemos assim uma prova poliédrica do teorema de emparelhamentos de Kőnig.

A demonstração do teorema de emparelhamentos de Kőnig também pode ser feita por indução:

Demonstração (De Caen [dC88]): Por (3.2), basta mostrar que $\nu(G) \geq \tau(G)$.

A afirmação é trivialmente verdadeira se G não tem arestas. Suponha então que G tem pelo menos uma aresta. Afirmamos que

G tem um vértice u saturado por todos os emparelhamentos máximos em G . (3.5)

De fato, suponha o contrário. Seja u um vértice saturado por algum emparelhamento máximo e v um vizinho de u . Como estamos supondo (3.5) falso, então existem emparelhamentos máximos M_u e M_v tais que M_u não satura u e M_v não satura v . Por serem máximos, M_u satura v e M_v satura u .

Seja P o componente de $(V(G), M_u \cup M_v)$ que contém u . É claro que P é um caminho que tem u como uma das extremidades e que P é par, pois caso contrário P seria um caminho M_u -aumentador. Ademais, v não está em P , pois caso contrário P terminaria em v e $P + uv$ seria um circuito ímpar em G . Mas então $P + uv$ é um caminho M_v -aumentador, um absurdo. Segue a validade de (3.5).

Seja u um vértice como em (3.5). Então $\nu(G - u) = \nu(G) - 1$. Por indução, existe uma cobertura mínima por vértices K em $G - u$ de tamanho $\tau(G - u) = \nu(G - u) = \nu(G) - 1$. É claro que $K \cup \{u\}$ é uma cobertura por vértices em G de tamanho $\nu(G)$, como queríamos. \square

Do teorema de emparelhamentos de Kőnig podemos derivar facilmente um teorema de Frobenius [Fro17], provado originalmente no contexto de determinantes, que caracteriza os grafos bipartidos que têm um emparelhamento perfeito:

Corolário 3.1.1 (Teorema de Frobenius)

Seja $G = (V, E)$ um grafo bipartido. Então G tem um emparelhamento perfeito se, e somente se, toda cobertura por vértices em G tem tamanho pelo menos $|V|/2$.

Demonstração: Imediato do teorema de emparelhamentos de Kőnig, pois G tem um emparelhamento perfeito se, e somente se, $|V|/2 \leq \nu(G) = \tau(G)$. \square

Corolário 3.1.2

Seja G um grafo bipartido k -regular, com $k > 0$. Então G tem um emparelhamento perfeito.

Demonstração: Seja $G = (V, E)$ como no enunciado. Então cada vértice cobre exatamente k arestas. Como $|E| = k|V|/2$, então são necessários no mínimo $|V|/2$ vértices para cobrir todas as arestas. Agora o resultado segue do teorema de Frobenius. \square

3.1.1 O teorema de coloração de arestas de Kőnig

A idéia da prova da afirmação (3.5), na demonstração dada por de Caen, também pode ser usada para provarmos o teorema de coloração de arestas de Kőnig [Kőn16]:

Teorema 3.2 (Teorema de coloração de arestas de Kőnig)

Seja G um grafo bipartido. Então

$$\chi'(G) = \Delta(G). \quad (3.6)$$

Isto é, o número de cores de uma coloração mínima de arestas de G é igual ao grau máximo de G .

Demonstração: Por (2.14), basta mostrar que $\chi'(G) \leq \Delta(G)$.

A prova é por indução no número de arestas de G . A relação (3.6) vale trivialmente se G não tem arestas.

Seja uv uma aresta de G . Pela hipótese de indução, existe uma coloração de arestas $\chi' = \{M_1, \dots, M_k\}$ do grafo $G - uv$ com $k := \Delta(G - uv)$. Se $k = \Delta(G) - 1$, então $\chi' \cup \{uv\}$ é uma coloração das arestas de G com $\Delta(G)$ cores. Suponha então que $k = \Delta(G)$.

Existe um emparelhamento $M_u \in \chi'$ que não satura u . Também existe $M_v \in \chi'$ que não satura v . Se $M_u = M_v$, então $\chi' \Delta \{M_u, M_u \cup \{uv\}\}$ é uma coloração das arestas de G com $\Delta(G)$ cores. Suponha então que $M_u \neq M_v$. Seja P o componente do grafo $(V(G), M_u \cup M_v)$ que contém u . É claro que P é um caminho que tem u como uma das extremidades. Ademais, v não está em P , pois caso contrário P terminaria em v e seria par, de modo que $P + uv$ seria um circuito ímpar em G . Então $\chi' \Delta \{M_u, M_v, M, N\}$, onde $M := M_u \Delta E(P)$ e $N := (M_v \Delta E(P)) \cup \{uv\}$, é uma coloração das arestas de G com $\Delta(G)$ cores, como queríamos. \square

É fácil transformar a prova acima do teorema de coloração de arestas de Kőnig num algoritmo para encontrar uma tal coloração mínima de um grafo bipartido $G = (V, E)$ em tempo $O(nm)$.

Vamos ver agora uma prova alternativa do teorema de coloração de arestas de Kőnig. O resultado a seguir pode ser visto como um refinamento do corolário 3.1.2.

Teorema 3.3

Seja G um grafo bipartido k -regular, com $k > 0$. Então $\chi'(G) = k$.

Demonstração (Rizzi [Riz98]): Seja G um contra-exemplo com o número mínimo de arestas. Seja $e = uv$ uma aresta. Tome $G' := G - e$. Estenda o grafo G' a um grafo H bipartido k -regular da seguinte maneira: se $N_G(u) = \{v_1, \dots, v_k\}$ e $N_G(v) = \{u_1, \dots, u_k\}$, com $u = u_k$ e $v = v_k$, então adicione a G' as arestas $u_1v_1, \dots, u_{k-1}v_{k-1}$.

Como o grafo H tem menos arestas que G , então existe uma coloração $\chi' = \{M_1, \dots, M_k\}$ das arestas de H , e é claro que M_i é um emparelhamento perfeito de H para todo i . Mas como adicionamos a H menos que k arestas, e χ' tem k emparelhamentos, então existe algum $M \in \chi'$ sem nenhuma aresta nova, ou seja, $M \subseteq E(G')$. Logo, $M' := M \cup \{e\}$ é um emparelhamento perfeito em G . Pela minimalidade de G , o grafo $G - M'$ tem uma coloração das arestas com $k - 1$ cores. Podemos tomar M' como a k -ésima cor e obter $\chi'(G) \leq k$, um absurdo. \square

O lema a seguir, devido a König [Kön32], afirma que todo grafo bipartido é subgrafo de algum grafo bipartido regular, de uma certa forma justa:

Lema 3.4

Seja G um grafo (U, W) -bipartido, com $|U| \leq |W|$. Então existe um grafo H , supergrafo de G , que é (U', W) -bipartido, com $U' \supseteq U$, e que é $\Delta(G)$ -regular.

Demonstração: Adicione $|W| - |U|$ vértices novos a U . Chame o conjunto resultante de U' . Escolha como H um grafo (U', W) -bipartido satisfazendo $G \subseteq H \subseteq K_{U', W}$, e que tenha o maior número de arestas possível tal que $\Delta(H) = \Delta(G)$.

Afirmamos que H é $\Delta(G)$ -regular. De fato, suponha que existe algum vértice $u' \in U'$ com $d_H(u') < \Delta(G)$. Como H é bipartido, então $\sum_{u \in U'} d_H(u) = |E(H)| = \sum_{w \in W} d_H(w)$. Logo, existe um vértice $w \in W$ com $d_H(w) < \Delta(G)$. Mas então a aresta $u'w$ poderia ser adicionada a H , contradizendo a escolha de H com o maior número de arestas possível. \square

O teorema 3.3, em conjunto com o lema 3.4, fornece uma segunda prova do teorema de coloração de arestas de König, sem utilizar o argumento de caminhos alternantes.

3.1.2 Notas históricas: König e Frobenius

Os comentários a seguir são baseados no livro enciclopédico de Schrijver [Sch03a, seção 16.7h].

Frobenius [Fro12], estudando propriedades sobre determinantes, publicou em 1912 um resultado sobre decomposições de matrizes. Ele forneceu uma prova combinatória e outra algébrica.

Seu resultado, entretanto, era provado “a partir de propriedades escondidas de determinantes com elementos não-negativos”, como admite o próprio Frobenius em [Fro17], e utilizava “argumentos complicados”, segundo König [Kön32]. Com a ajuda da teoria dos grafos, König [Kön15] forneceu uma prova “mais clara e mais simples” do resultado de Frobenius.

Em 1916, König [Kön16] provou seu teorema de coloração de arestas em grafos bipartidos (teorema 3.2), a partir do qual ele provou outros resultados sobre grafos bipartidos, como o corolário 3.1.2, e também sobre determinantes.

Frobenius [Fro17] provou em seguida um resultado sobre determinantes, a partir do qual obteve provas elementares tanto do teorema de coloração de arestas de König quanto de seu próprio resultado sobre decomposição. Ele afirmou ainda que a teoria dos grafos não era útil para o desenvolvimento da teoria de determinantes, já que o teorema de König era apenas um caso especial, de pouco valor, que seguia de seu próprio resultado. Este sim, segundo ele, tinha valor.

Em 1931, na reunião da Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat (Sociedade Matemática e Física de Loránd Eötvös), em Budapeste, König [Kön31] apresentou seu teorema min-max sobre emparelhamentos.

Logo depois, König [Kön32] derivou ambos os teoremas anteriores de Frobenius usando seus resultados provados através de grafos. Numa nota de rodapé, König responde a Frobenius, afirmando que seu menosprezo pela teoria dos grafos era infundado, já que o teorema que Frobenius afirmava “ter valor” pôde também ser provado através da teoria dos grafos, inclusive “de forma simples e ilustrativa, que corresponde naturalmente com o caráter combinatório do teorema, e que também leva a uma notável generalização”.

3.2 O teorema do casamento de Hall

O resultado a seguir, devido a Hall [Hal35], mostra uma condição necessária e suficiente para a existência de um emparelhamento saturando uma das classes de cores num grafo bipartido:

Teorema 3.5 (Teorema do casamento de Hall)

Seja G um grafo (U, W) -bipartido. Então G tem um emparelhamento que satura U se, e somente se,

$$|N(S)| \geq |S| \tag{3.7}$$

para todo $S \subseteq U$.

Demonstração (Everett e Whaples [EW49]): A necessidade da condição (3.7) é óbvia. Vamos mostrar que ela é suficiente. Seja G um grafo como na hipótese do teorema.

Chame um subconjunto $S \subseteq U$ de *justo* se S satisfaz (3.7) com igualdade.

A prova é por indução em $|U|$. O teorema é obviamente verdadeiro se $|U| = 1$. Suponha então que $|U| \geq 2$.

Fixe $u \in U$. Se existe $w \in N_G(u)$ tal que $G - u - w$ tem um emparelhamento que satura $U \setminus \{u\}$, estamos feitos. Suponha então que, para todo

$w \in N_G(u)$, o grafo $G - u - w$ não tem um emparelhamento que satura $U \setminus \{u\}$. Vamos ver que isso é impossível.

Seja $w \in N_G(u)$. Tome $G' := G - u - w$. Abrevie $N(S) := N_G(S)$ e $N'(S) := N_{G'}(S)$. Como G' não tem um emparelhamento que satura $U' := U \setminus \{u\}$, a hipótese de indução garante a existência de um conjunto $S \subseteq U'$ com $|N'(S)| < |S|$. Como $|N(S)| \geq |S|$, temos obrigatoriamente $|N(S)| = |S|$ e $w \in N(S)$. Concluimos que,

$$\begin{aligned} &\text{para todo } w \in N(u), \text{ existe um subconjunto } S_w \subseteq U' & (3.8) \\ &\text{justo, com } w \in N(S_w). \end{aligned}$$

Pelo lema 2.5, a função $N(S)$ é submodular. Como ela satisfaz (3.7), então os subconjuntos justos de U são fechados por união e intersecção. De fato, sejam $X, Y \subseteq U$ conjuntos justos. Então

$$\begin{aligned} |X| + |Y| &= |X \cup Y| + |X \cap Y| \\ &\leq |N(X \cup Y)| + |N(X \cap Y)| & (3.9) \\ &\leq |N(X)| + |N(Y)| = |X| + |Y|, \end{aligned}$$

de modo que todas as inequações valem com igualdade. Portanto, $X \cup Y$ e $X \cap Y$ também são justos.

Tome $S := \bigcup_{w \in N(u)} S_w$, onde S_w é como em (3.8). Como cada S_w é justo, então $S \subseteq U'$ também é justo. Ademais, $N(u) \subseteq N(S)$. Tomando $S' := S \cup \{u\}$ obtemos a contradição $|N(S')| = |N(S)| = |S| < |S'|$. \square

Mencionamos ainda que diversos autores utilizam o nome “teorema do casamento” apenas para o caso em que ambas as classes de cores têm o mesmo tamanho.

O caráter min-max do teorema do casamento de Hall foi explicitado por Ore [Ore55] na seguinte versão defectiva:

Corolário 3.5.1

(Versão defectiva do teorema do casamento de Hall)

Seja G um grafo (U, W) -bipartido. Então

$$\nu(G) = |U| - \text{def}_U(G), \quad (3.10)$$

onde

$$\text{def}_U(G) := \max_{S \subseteq U} \{|S| - |N(S)|\}. \quad (3.11)$$

Ou seja,

$$\nu(G) = \min_{S \subseteq U} \{|U| + |N(S)| - |S|\}. \quad (3.12)$$

Demonstração: É evidente que $\nu(G) \leq |U| - \text{def}_U(G)$. Vamos mostrar que $\nu(G) \geq |U| - \text{def}_U(G)$. Adicione $\text{def}_U(G)$ novos vértices a W e ligue cada

um deles a todos os vértices de U . Aplicando o teorema do casamento de Hall, obtemos um emparelhamento M que cobre U . Existem no máximo $\text{def}_U(G)$ arestas de M que ligam algum vértice de U a algum vértice novo. Logo, a restrição de M às arestas originais de G fornece um emparelhamento do tamanho desejado. \square

3.3 O teorema de Menger e suas versões

Diversos resultados em otimização combinatória igualam o número máximo de caminhos disjuntos entre um par de vértices ou conjuntos ao tamanho mínimo de um conjunto separador. Há várias versões, como por exemplo caminhos disjuntos dos vértices, ou caminhos disjuntos internamente nos vértices, ou ainda, caminhos disjuntos apenas nos arcos. O tipo específico do conjunto separador em questão varia de acordo. É possível ainda escolhermos entre grafos orientados e não-orientados. Todos os resultados dessa natureza são chamados de versões do teorema de Menger. Nesta seção mostraremos algumas dessas versões.

Menger [Men27] provou originalmente que, num grafo não-orientado, o número máximo de (S, T) -caminhos disjuntos é igual ao tamanho mínimo de um conjunto de vértices (S, T) -desconectador.

Gallai, sob o pseudônimo de Grünwald [Grü38], provou que o resultado acima também vale para grafos orientados. A demonstração a seguir é semelhante à idéia da prova original de Menger, que faz uma decomposição em dois subproblemas determinados por um conjunto separador.

Teorema 3.6

(Teorema de Menger, versão orientada, disjunta nos vértices)

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado e sejam $S, T \subseteq V$. Então o número máximo de (S, T) -caminhos disjuntos nos vértices é igual ao tamanho mínimo de um conjunto de vértices (S, T) -desconectador.

Demonstração (Göring [Gör00]): É evidente que o máximo não pode ser maior que o mínimo. Vamos mostrar que vale a igualdade, usando indução no número de arcos de D . O teorema é obviamente válido se D não tem arcos.

Seja $a = (u, v) \in A$. Seja k o tamanho mínimo de um conjunto de vértices (S, T) -desconectador em D . Se todo conjunto de vértices (S, T) -desconectador em $D - a$ tem tamanho pelo menos k , então a hipótese de indução nos garante que existem k (S, T) -caminhos disjuntos nos vértices em $D - a$, e portanto em D .

Suponha então que C é um conjunto de vértices (S, T) -desconectador em $D - a$ de tamanho mínimo, com $|C| \leq k - 1$. Note que não pode ocorrer $|C| < k - 1$, pois $C \cup \{u\}$ e $C \cup \{v\}$ são (S, T) -desconectores em D .

Observe agora que, se B é um conjunto de vértices $(S, C \cup \{u\})$ -desconectador em $D - a$, então B é (S, T) -desconectador em D , já que todo (S, T) -caminho em D contém um $(S, C \cup \{u\})$ -caminho em $D - a$. Assim, $|B| \geq k$.

Pela hipótese de indução, o grafo $D - a$ contém k $(S, C \cup \{u\})$ -caminhos disjuntos nos vértices. Analogamente, $D - a$ contém k $(C \cup \{v\}, T)$ -caminhos disjuntos nos vértices. Cada caminho da primeira coleção intersecta outro caminho da segunda coleção apenas em C , pois caso contrário haveria um (S, T) -caminho em $D - a$ que não passa por C .

Observe ainda que cada vértice de $C \cup \{u\}$ é o término de um caminho da primeira coleção, já que $|C \cup \{u\}| = k$. Analogamente para os vértices de $C \cup \{v\}$ e os caminhos da segunda coleção.

Assim, podemos concatenar $|C| = k - 1$ caminhos das duas coleções para obter $k - 1$ caminhos de S a T em D . Finalmente, ligamos os caminhos de S a u e de v a T com o arco $a = (u, v)$ para obtermos o k -ésimo (S, T) -caminho, como queríamos. \square

Vamos derivar a seguir outras versões do teorema de Menger.

Corolário 3.6.1

(Teorema de Menger, versão orientada, internamente disjunta nos vértices)

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado e sejam s, t vértices não-adjacentes em D . Então o número máximo de (s, t) -caminhos internamente disjuntos nos vértices é igual ao tamanho mínimo de um conjunto de vértices (s, t) -separador.

Demonstração: Tome $D' := D - s - t$ e os conjuntos $S := \{v \in V : (s, v) \in A\}$ e $T := \{v \in V : (v, t) \in A\}$. Agora basta aplicar o teorema 3.6 a D', S e T . \square

Note que

a construção reversa possibilita a prova do teorema 3.6 a partir do corolário 3.6.1. (3.13)

De fato, dados D, S e T , crie dois vértices novos s e t e arcos (s, v) para todo $v \in S$ e arcos (v, t) para todo $v \in T$.

A versão a seguir foi provada por Dantzig e Fulkerson [DF55, DF56]:

Corolário 3.6.2

(Teorema de Menger, versão orientada, disjunta nos arcos)

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado e sejam s, t vértices distintos de D . Então o número máximo de (s, t) -caminhos disjuntos nos arcos é igual ao tamanho mínimo de um (s, t) -corte.

Demonstração: Seja $L(D)$ o grafo dos arcos de D . Basta aplicar o teorema 3.6 a $L(D)$, $\delta_D^{\text{out}}(s)$ e $\delta_D^{\text{in}}(t)$. \square

Vale notar ainda que

$$\text{o corolário 3.6.1 pode ser provado através do corolário 3.6.2.} \quad (3.14)$$

Para tanto, crie o grafo D' a partir de D da seguinte maneira. Transforme cada vértice v em dois vértices v^{in} e v^{out} , ligados por um arco $(v^{\text{in}}, v^{\text{out}})$. Troque cada arco $(u, v) \in A$ por um arco $(u^{\text{out}}, v^{\text{in}})$. Agora basta aplicar o corolário 3.6.2 a D' , s^{out} e t^{in} .

A versão não-orientada disjunta nos vértices segue imediatamente do teorema 3.6: basta trocarmos cada aresta uv pelo par de arcos (u, v) e (v, u) .

Vamos mostrar uma outra prova dessa versão:

Teorema 3.7

(Teorema de Menger, versão não-orientada, internamente disjunta nos vértices)

Seja $G = (V, E)$ um grafo e s, t vértices não-adjacentes de G . Então o número máximo de (s, t) -caminhos internamente disjuntos nos vértices é igual ao tamanho mínimo de um conjunto de vértices (s, t) -separador.

Demonstração (Nash-Williams e Tutte [NWT77]): Seja k o tamanho mínimo de um conjunto de vértices que é (s, t) -separador em G . Vamos mostrar por indução no número de arestas que existem k (s, t) -caminhos internamente disjuntos nos vértices. A afirmação é trivialmente verdadeira se G não tem arestas.

É fácil ver também que o teorema vale se toda aresta de G incide em s ou em t . Suponha então que $e = xy \in E$ não incide nem em s e nem em t .

Se o tamanho mínimo de um subconjunto de vértices (s, t) -separador em $G - e$ é k , basta aplicar a hipótese de indução para obter k caminhos ligando s a t em G e que são internamente disjuntos nos vértices. Podemos supor então que o tamanho mínimo de um conjunto de vértices (s, t) -separador em $G - e$ é $k - 1$. Seja C um conjunto de vértices (s, t) -separador em $G - e$, com $|C| = k - 1$.

Analogamente, podemos supor que o tamanho mínimo de um conjunto de vértices (s, t) -separador em G/e é $k - 1$, pois caso contrário o resultado segue novamente da hipótese de indução. Seja C'' um conjunto de vértices (s, t) -separador em G/e , com $|C''| = k - 1$. Note que C'' necessariamente contém o novo vértice obtido da contração de e . Logo, existe um conjunto de vértices C' de tamanho k que é (s, t) -separador em G e que contém x e y .

Seja C_s o conjunto de vértices de $C \cup C'$ que são acessíveis em G a partir de s através de um caminho sem vértices internos em $C \cup C'$. Defina C_t similarmente, trocando s por t na última definição.

É fácil ver que tanto C_s como C_t são (s, t) -separadores em G . É óbvio que $C_s \cup C_t \subseteq C \cup C'$. Ademais, temos $C_s \cap C_t \subseteq C \cap C'$. De fato, seja $v \in C_s \cap C_t$. Então existe um (s, t) -caminho P em G que intersecta $C \cup C'$ apenas em v . Como ambos x e y estão em C' , então $e = xy \notin E(P)$. Logo, P também é um caminho em $G - e$. Assim, como v é o único vértice de P em $C \cup C'$, então v deve estar em C e em C' , pois caso contrário C não seria (s, t) -separador em $G - e$ ou C' não seria (s, t) -separador em G .

Portanto,

$$|C_s| + |C_t| = |C_s \cup C_t| + |C_s \cap C_t| \leq |C \cup C'| + |C \cap C'| = |C| + |C'| = 2k - 1,$$

contradizendo a hipótese de que ambos C_s e C_t têm tamanho maior ou igual a k . \square

3.3.1 Notas históricas: Menger e Kőnig

Os comentários a seguir são baseados no livro enciclopédico de Schrijver [Sch03a, seção 9.6e].

O teorema de Menger [Men27], publicado em 1927, foi provado originalmente num contexto topológico. Formulado em termos de grafos, ele afirmava o seguinte. Se $G = (V, E)$ é um grafo e $S, T \subseteq V$, então o número máximo de (S, T) -caminhos em G é igual ao tamanho mínimo de um conjunto de vértices que intersecta cada (S, T) -caminho.

Menger [Men81] conta a seguinte história. Em 1930, ele visitou Budapeste, onde conheceu diversos matemáticos húngaros, como por exemplo Kőnig. Este contou a Menger que ele estava escrevendo um livro contendo todos os resultados conhecidos até então sobre grafos. Na verdade, esse livro de Kőnig [Kön36] foi o primeiro livro dedicado inteiramente à teoria dos grafos.

Ao saber do livro, Menger contou seu resultado de 1927, até então desconhecido por Kőnig. Este se interessou muito, porém achou que o resultado estava incorreto. Disse então que, naquela noite, não iria dormir até que tivesse construído um contra-exemplo. No dia seguinte, quando os dois matemáticos se encontraram, Kőnig cumprimentou Menger dizendo que não havia dormido durante a noite, e pediu um esboço da prova do teorema, que seria incluso em seu livro.

Kőnig [Kön32] notou, entretanto, que a prova dada por Menger em seu artigo de 1927 estava incompleta. De fato, ele supunha a existência de um certo vértice que poderia ser removido do grafo para a aplicação da hipótese de indução. E se tal vértice existe, o argumento de Menger de fato funciona, e é semelhante à prova dada por Göring [Gör00] para o teorema 3.6. Entretanto, nada impede que o suposto vértice não exista. Neste caso, o problema se reduz a encontrar um emparelhamento de mesmo tamanho que uma cobertura por vértices num grafo bipartido, ou seja, é justamente o

problema resolvido pelo teorema de emparelhamentos de Kőnig. Esta era a base não-trivial da indução usada por Menger.

Kőnig [Kőn32] notou tal falha e, tendo resolvido o problema com seu teorema, apresentou uma demonstração completa do teorema de Menger. Ele observou ainda que, após notificar Menger da falha, foi informado de que uma prova sem falhas e puramente combinatória havia sido publicada no livro de Menger [Men32].

3.4 Fluxos máximos e cortes mínimos

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado e sejam s, t vértices distintos de D . Um (s, t) -fluxo é uma função $f \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^A$ que satisfaz a seguinte propriedade, chamada de *conservação do fluxo*:

$$f(\delta^{\text{in}}(v)) = f(\delta^{\text{out}}(v)), \quad (3.15)$$

para todo vértice $v \in V \setminus \{s, t\}$.

O *valor* de um (s, t) -fluxo f é definido como

$$\text{valor}(f) := f(\delta^{\text{out}}(s)) - f(\delta^{\text{in}}(s)). \quad (3.16)$$

Teorema 3.8 (Decomposição de fluxos)

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado e sejam s, t vértices distintos de D . Seja f um (s, t) -fluxo. Então existem $\mu_1, \dots, \mu_k, \lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, circuitos C_1, \dots, C_k e (s, t) -caminhos P_1, \dots, P_ℓ tais que $k + \ell \leq |A|$,

$$f = \mu_1 \chi^{C_1} + \dots + \mu_k \chi^{C_k} + \lambda_1 \chi^{P_1} + \dots + \lambda_\ell \chi^{P_\ell}, \quad (3.17)$$

e $\text{valor}(f) = \lambda_1 + \dots + \lambda_\ell$.

Demonstração: A prova é por indução no tamanho do suporte de f . Se $f = 0$, nada temos a demonstrar. Suponha então que $S_f := \text{supp}(f) \neq \emptyset$.

É evidente que $f(a) > 0$ para algum arco $a = (s, u)$. Seja P um caminho maximal partindo de s no grafo (V, S_f) . Seja x o vértice em que P termina.

Suponha que $x \neq t$. Então $\delta_{S_f}^{\text{out}}(x) \neq \emptyset$ pela conservação do fluxo, e todos os arcos de $\delta_{S_f}^{\text{out}}(x)$ têm a ponta final em $V(P)$. Existe então um circuito C no grafo (V, S_f) . Seja $\alpha := \min \{f(a) : a \in A(C)\}$. Agora basta aplicar a hipótese de indução para o (s, t) -fluxo $f - \alpha \chi^C$.

Suponha agora que $x = t$, isto é, que P é um (s, t) -caminho. Tome $\alpha := \min \{f(a) : a \in A(P)\}$. Novamente, basta aplicar a hipótese de indução para o (s, t) -fluxo $f - \alpha \chi^P$.

É evidente que f será decomposto em no máximo $|\text{supp}(f)| \leq |A|$ caminhos e circuitos, como queríamos. \square

Seja $c \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^A$ uma função capacidade sobre os arcos de A . Um (s, t) -fluxo *sujeito a c* é um (s, t) -fluxo f tal que $f(a) \leq c(a)$ para todo arco $a \in A$. Se f

tem valor máximo dentre todos os (s, t) -fluxos sujeitos a c , dizemos que f é um (s, t) -fluxo máximo.

Proposição 3.9

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado e sejam s, t vértices distintos de D . Seja $\delta^{\text{out}}(S)$ um (s, t) -corte, ou seja, $\{s\} \subseteq S \subseteq V \setminus \{t\}$. Então

$$\text{valor}(f) = f(\delta^{\text{out}}(S)) - f(\delta^{\text{in}}(S)). \quad (3.18)$$

Demonstração: Pela condição (3.15) da conservação do fluxo, temos

$$\begin{aligned} \text{valor}(f) &= f(\delta^{\text{out}}(s)) - f(\delta^{\text{in}}(s)) \\ &= \sum_{v \in S} [f(\delta^{\text{out}}(v)) - f(\delta^{\text{in}}(v))]. \end{aligned}$$

Nesse somatório, se a é um arco com as duas pontas em S , então $f(a)$ é somado uma vez com sinal positivo e outra com negativo. Resta então apenas o fluxo nos arcos que têm uma única ponta em S :

$$\begin{aligned} \text{valor}(f) &= \sum_{v \in S} [f(\delta^{\text{out}}(v)) - f(\delta^{\text{in}}(v))] \\ &= f(\delta^{\text{out}}(S)) - f(\delta^{\text{in}}(S)). \end{aligned}$$

□

A igualdade (3.18) fornece um limitante superior óbvio para o valor de um (s, t) -fluxo f sujeito a c :

$$\text{valor}(f) \leq f(\delta^{\text{out}}(S)) \leq c(\delta^{\text{out}}(S)),$$

para todo (s, t) -corte $\delta^{\text{out}}(S)$. Em particular, se f^* é um (s, t) -fluxo máximo e $\delta^{\text{out}}(S^*)$ é um (s, t) -corte de capacidade mínima, então

$$\text{valor}(f^*) \leq c(\delta^{\text{out}}(S^*)). \quad (3.19)$$

O conteúdo do teorema do fluxo máximo e corte mínimo é que sempre vale a igualdade em (3.19), como veremos a seguir.

3.4.1 O teorema do fluxo máximo e corte mínimo

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado e sejam s, t vértices distintos de D . Seja $c \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^A$ uma função capacidade sobre os arcos de D . Fixe um (s, t) -fluxo f sujeito a c .

Defina o conjunto $A_f \subseteq A \cup A^{-1}$ da seguinte maneira:

$$A_f := \{a : a \in A \text{ e } f(a) < c(a)\} \cup \{a^{-1} : a \in A \text{ e } f(a) > 0\}. \quad (3.20)$$

Chame o grafo orientado $D_f := (V, A_f)$ de *grafo residual de f* .

Um *caminho f -aumentador* é um (s, t) -caminho no grafo residual D_f . Esse nome é justificado a seguir.

Proposição 3.10

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado e sejam s, t vértices distintos de D . Seja $c \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^A$ uma função capacidade sobre os arcos de D e f um (s, t) -fluxo sujeito a c . Se existe um caminho f -aumentador, então existe um (s, t) -fluxo f' sujeito a c com $\text{valor}(f') > \text{valor}(f)$.

Demonstração: Seja P um caminho f -aumentador. Defina o vetor $\chi^P \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^A$ como

$$\chi^P(a) := \begin{cases} +1 & \text{se } P \text{ percorre } a; \\ -1 & \text{se } P \text{ percorre } a^{-1}; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.21)$$

É fácil ver que existe um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$f' := f + \varepsilon \chi^P \quad (3.22)$$

é um (s, t) -fluxo sujeito a c . É fácil ver também que $\text{valor}(f') = \text{valor}(f) + \varepsilon$, de modo que f' é um (s, t) -fluxo como queríamos. \square

O teorema do fluxo máximo e corte mínimo, que enunciamos a seguir, foi provado por Ford e Fulkerson [FF54, FF56] para o caso não-orientado e por Dantzig e Fulkerson [DF55, DF56] para o caso orientado:

Teorema 3.11 (Teorema do fluxo máximo e corte mínimo)

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado. Sejam s, t vértices distintos de D e seja $c \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^A$ uma função capacidade sobre os arcos de D . Então o valor de um (s, t) -fluxo máximo é igual à capacidade mínima de um (s, t) -corte.

Demonstração: Seja f^* um (s, t) -fluxo máximo. Pela inequação (3.19), basta mostrarmos que existe um (s, t) -corte de capacidade $\text{valor}(f^*)$.

Pela proposição 3.10, não existe um caminho f^* -aumentador. Então o conjunto S^* dos vértices de D_{f^*} acessíveis a partir de s é tal que $s \in S^*$ e $t \notin S^*$.

Seja $a = (u, v)$ um arco em $\delta_A^{\text{out}}(S^*)$. Então $f^*(a) = c(a)$, pois caso contrário $a \in A(D_{f^*})$, de modo que $v \in S^*$, um absurdo. Segue que

$$f^*(\delta_A^{\text{out}}(S^*)) = c(\delta_A^{\text{out}}(S^*)).$$

Seja $a = (u, v)$ um arco em $\delta_A^{\text{in}}(S^*)$. Então $f^*(a) = 0$, pois caso contrário $a^{-1} \in A(D_{f^*})$, de modo que $u \in S^*$, um absurdo. Segue que

$$f^*(\delta_A^{\text{in}}(S^*)) = 0.$$

Assim, pela proposição 3.9, temos

$$\text{valor}(f^*) = c(\delta_A^{\text{out}}(S^*)), \quad (3.23)$$

como queríamos. \square

Obtemos imediatamente uma condição necessária e suficiente para que um fluxo seja máximo, bem como um algoritmo para encontrar um fluxo máximo e um corte mínimo.

Corolário 3.11.1

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado e sejam s, t vértices distintos de D . Seja $c \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^A$ uma função capacidade sobre os arcos de D e f um (s, t) -fluxo sujeito a c . Então f é máximo se, e somente se, não existe um caminho f -aumentador.

Demonstração: Imediato da prova do teorema do fluxo máximo e corte mínimo: se f é um (s, t) -fluxo sujeito a c e não existe caminho f -aumentador, então f é máximo. \square

Outra consequência é a seguinte:

Corolário 3.11.2 (Integralidade do fluxo máximo)

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado e sejam s, t vértices distintos de D . Seja $c \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^A$ uma função capacidade sobre os arcos de D . Se c é integral, então existe um (s, t) -fluxo máximo f que é integral.

Demonstração: Imediato do corolário 3.11.1 e da proposição 3.10: basta tomar inicialmente $f := 0$ e aplicar iterativamente a prova da proposição 3.10 com $\varepsilon := 1$. \square

Não é difícil provar o teorema do fluxo máximo e corte mínimo usando folgas complementares. A unimodularidade total da matriz de incidência de grafos orientados também implica facilmente o teorema do fluxo máximo e corte mínimo, bem como a integralidade do fluxo máximo (corolário 3.11.2).

Historicamente, mencionamos que a motivação de Ford e Fulkerson não era encontrar fluxos máximos, mas sim cortes mínimos. Mais precisamente, eles estavam interessados em fazer um estudo da capacidade da rede ferroviária soviética, para fins militares, na década de 50, como revela o relatório Harris-Ross (vide Schrijver [Sch03a, seção 10.8e]).

3.4.2 O algoritmo de Edmonds-Karp

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado e sejam s, t vértices distintos de D . Seja $c \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^A$ uma função capacidade sobre os arcos de D .

O corolário 3.11.1 e a prova da proposição 3.10 fornecem imediatamente um algoritmo que encontra um (s, t) -fluxo máximo em D . Basta repetir iterativamente o seguinte algoritmo aumentador de fluxo:

AUMENTADOR-DE-FLUXO(D, s, t, c, f)

```

1  se existe um caminho  $f$ -aumentador  $P$ 
2      então seja  $P$  um caminho  $f$ -aumentador e  $\chi^P$  como em (3.21)
3          seja  $\varepsilon > 0$  máximo tal que  $0 \leq f + \varepsilon\chi^P \leq c$ 
4          devolva  $f + \varepsilon\chi^P$ 
5  senão  $S \leftarrow \{v \in V(D) : v \text{ é acessível a partir de } s \text{ em } D_f\}$ 
6      devolva  $\delta_D^{\text{out}}(S)$ 

```

Dado um (s, t) -fluxo f sujeito a c num grafo orientado D , o algoritmo AUMENTADOR-DE-FLUXO devolve ou um fluxo de valor maior que f , ou então certifica que f é máximo, devolvendo um (s, t) -corte cuja capacidade é igual ao valor de f .

A corretude do algoritmo AUMENTADOR-DE-FLUXO é imediata da proposição 3.10 e do teorema do fluxo máximo e corte mínimo.

Para encontrar um fluxo máximo, basta repetir iterativamente o algoritmo AUMENTADOR-DE-FLUXO até que ele devolva um (s, t) -corte de capacidade mínima:

FLUXO-MÁXIMO(D, s, t, c)

```

1   $f \leftarrow \mathbf{0}$ 
2  enquanto AUMENTADOR-DE-FLUXO( $D, s, t, c, f$ ) é um  $(s, t)$ -fluxo
3      faça  $f \leftarrow$  AUMENTADOR-DE-FLUXO( $D, s, t, c, f$ )
4  devolva  $f$  e AUMENTADOR-DE-FLUXO( $D, s, t, c, f$ )

```

Observe que o algoritmo FLUXO-MÁXIMO devolve um (s, t) -fluxo f^* e um (s, t) -corte $\delta_D^{\text{out}}(S^*)$. Como $\text{valor}(f^*) = c(\delta_D^{\text{out}}(S^*))$, o (s, t) -fluxo f^* certifica que $\delta_D^{\text{out}}(S^*)$ é um (s, t) -corte de capacidade mínima e o (s, t) -corte $\delta_D^{\text{out}}(S^*)$ certifica que f^* é um (s, t) -fluxo máximo.

Teorema 3.12

O algoritmo FLUXO-MÁXIMO termina após um número finito de execuções da iteração das linhas 2–3.

Demonstração: Seja M o mínimo múltiplo comum dos denominadores dos componentes do vetor $c \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^A$. Note que $Mc(a)$ é inteiro para todo arco $a \in A$. Mas então, a cada iteração das linhas 2–3, o valor de f aumenta em no mínimo $1/M$. Como o valor de f não pode ultrapassar $c(\delta_D^{\text{out}}(S^*))$, onde $\delta_D^{\text{out}}(S^*)$ é um (s, t) -corte de capacidade mínima, segue que o algoritmo termina após um número finito de execuções das linhas 2–3. \square

O algoritmo FLUXO-MÁXIMO, no entanto, não é polinomial, como mostra o exemplo da figura 3.1.

Entretanto, Dinits [Din70] e Edmonds e Karp [EK72] mostraram como modificar o algoritmo FLUXO-MÁXIMO de modo a torná-lo fortemente polinomial:

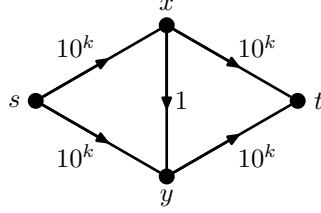


Figura 3.1: Os caminhos f -aumentadores podem ser escolhidos de modo a causar $2 \cdot 10^k$ execuções da iteração das linhas 2–3 do algoritmo FLUXO-MÁXIMO, consumindo assim tempo exponencial no tamanho da entrada, que é $O(k)$.

Teorema 3.13

Se, na linha 2 do algoritmo AUMENTADOR-DE-FLUXO, o caminho f -aumentador escolhido for um (s, t) -caminho de comprimento mínimo em D_f , isto é, com o menor número possível de arcos, então o número de iterações das linhas 2–3 do algoritmo FLUXO-MÁXIMO é, no máximo, $|V| \cdot |A|$.

Demonstração: Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado qualquer e sejam s, t vértices distintos de D . Denote por $\mu(D)$ o comprimento mínimo de um (s, t) -caminho em D e por $\alpha(D)$ o conjunto de arcos que aparecem em algum (s, t) -caminho mínimo de D .

Primeiro vamos mostrar que,

$$\text{se } D' := (V, A \cup \alpha(D)^{-1}), \text{ então temos } \mu(D') = \mu(D) \text{ e } \alpha(D') = \alpha(D). \quad (3.24)$$

Para tanto, basta mostrarmos que $\mu(D)$ e $\alpha(D)$ não mudam se adicionarmos a D um arco a^{-1} , onde $a \in \alpha(D)$. Suponha o contrário: então existe um (s, t) -caminho P em $A \cup \{a^{-1}\}$ percorrendo o arco a^{-1} e de comprimento no máximo $\mu(D)$. Como $a \in \alpha(D)$, existe um (s, t) -caminho Q percorrendo a e de comprimento $\mu(D)$. Mas então existe um (s, t) -caminho em $(A(P) \cup A(Q)) \setminus \{a, a^{-1}\}$ de comprimento estritamente menor que $\mu(D)$, o que é um absurdo, pois tal caminho está em D . Segue a validade da afirmação (3.24).

Agora fixe um grafo orientado D e um (s, t) -fluxo f sujeito a c . Se aumentarmos o fluxo f utilizando um caminho f -aumentador, como na prova da proposição 3.10, e obtivermos o fluxo f' , então $D_{f'}$ é um subgrafo de $D' := (V, A_f \cup \alpha(D_f)^{-1})$. Logo, por (3.24), $\mu(D_{f'}) \geq \mu(D') = \mu(D_f)$.

Ademais, se $\mu(D_{f'}) = \mu(D_f)$, então $\alpha(D_{f'}) \subseteq \alpha(D') = \alpha(D_f)$, pela afirmação (3.24). Porém, pelo menos um arco de $\alpha(D_f)$ não está em $D_{f'}$,

pois escolhemos o maior ε possível na linha 3 do algoritmo AUMENTADOR-DE-FLUXO. Logo, $\alpha(D_{f'}) \subsetneq \alpha(D_f)$.

Assim, como $\mu(D_f)$ aumenta no máximo $|V|$ vezes e, enquanto $\mu(D_f)$ permanece constante, $\alpha(D_f)$ decresce no máximo $|A|$ vezes, segue o resultado. \square

3.5 Equivalência entre os resultados

O teorema de emparelhamentos de Kőnig, o teorema do casamento de Hall, o teorema de Menger e o teorema do fluxo máximo e corte mínimo são, na verdade, equivalentes, no sentido de que um pode ser usado para provar o outro. A seguir mostramos como isso pode ser feito.

Teorema 3.14

O teorema de emparelhamentos de Kőnig implica o teorema do casamento de Hall.

Demonstração: Seja G um grafo (U, W) -bipartido. Suponha que G satisfaz a condição (3.7) de Hall. Vamos mostrar que G tem um emparelhamento que satura U .

Suponha por contradição que $\nu(G) < |U|$. Seja K uma cobertura mínima por vértices em G . Tome $K_U := K \cap U$ e $K_W := K \cap W$. Pelo teorema de emparelhamentos de Kőnig, temos $|K_U| + |K_W| = \tau(G) = \nu(G) < |U|$, de modo que $|K_W| < |U| - |K_U| = |U \setminus K_U|$. Porém, todos os vizinhos de $U \setminus K_U$ devem estar em K_W , pois K é uma cobertura por vértices. Logo, para $S := U \setminus K_U$, temos $|N(S)| \leq |K_W| < |S|$, contradizendo a nossa suposição de que G satisfaz condição (3.7) de Hall. \square

Teorema 3.15

O teorema do casamento de Hall implica o teorema de emparelhamentos de Kőnig.

Demonstração: Seja G um grafo (U, W) -bipartido. Por (3.2), basta mostrarmos um emparelhamento de tamanho $\tau(G)$.

Seja K uma cobertura mínima por vértices de G . Tome $K_U := K \cap U$ e $K_W := K \cap W$. Tome $G_U := G - K_W - (U \setminus K_U)$. Seja $S \subseteq K_U$. Suponha, por contradição, que $|N_{G_U}(S)| < |S|$. Como todas as arestas de G_U cobertas por S também são cobertas por $N_{G_U}(S)$, então $K_W \cup (K_U \setminus S) \cup N_{G_U}(S)$ é uma cobertura por vértices de G de tamanho menor que $|K|$, um absurdo. Segue do teorema do casamento de Hall que G_U tem um emparelhamento M_U que satura K_U . Simetricamente, o grafo $G_W := G - K_U - (W \setminus K_W)$ tem um emparelhamento M_W que satura K_W . É óbvio que $M_U \cup M_W$ é um emparelhamento de tamanho $|K_U| + |K_W| = \tau(G)$, como queríamos. \square

Teorema 3.16

O teorema de Menger, em sua versão orientada, internamente disjunta nos vértices (corolário 3.6.1), implica o teorema de emparelhamentos de Kőnig.

Demonstração: Seja $G = (V, E)$ um grafo (U, W) -bipartido. Crie o grafo orientado D a partir de G da seguinte maneira. Oriente cada aresta de G de U a W . Crie um novo vértice s e arcos (s, u) para todo $u \in U$. Crie também um novo vértice t e arcos (w, t) para todo $w \in W$. Existe uma correspondência óbvia entre emparelhamentos em G e coleções de (s, t) -caminhos internamente disjuntos nos vértices em D . Existe também uma correspondência óbvia entre coberturas por vértices em G e conjuntos (s, t) -separadores em D . O teorema de emparelhamentos de Kőnig segue imediatamente do corolário 3.6.1, que é o teorema de Menger em sua versão orientada, internamente disjunta nos vértices. \square

Teorema 3.17

O teorema de emparelhamentos de Kőnig implica o teorema de Menger, em sua versão orientada, disjunta nos vértices (teorema 3.6).

Demonstração: Vamos provar o teorema de Menger, em sua versão orientada, disjunta nos vértices, a partir do teorema de emparelhamentos de Kőnig.

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado e sejam $S, T \subseteq V$. É óbvio que podemos supor que $S \cap T = \emptyset$. Vamos criar um grafo G não-orientado a partir de D . Para cada vértice $v \in V \setminus S$, crie em G um vértice v' e, para cada vértice $v \in V \setminus T$, crie em G um vértice v'' . Para cada vértice $v \in V \setminus (S \cup T)$, crie em G uma aresta $v'v''$. Para cada arco (u, v) de D com $u \in V \setminus T$ e $v \in V \setminus S$, crie em G uma aresta $u''v'$. É fácil ver que G é bipartido e que $M := \{v'v'' : v \in V \setminus (S \cup T)\}$ é um emparelhamento em G .

Para cada $X \subseteq V$, denote $X' := \{v' : v \in X\}$ e $X'' := \{v'' : v \in X\}$.

Seja M^* um emparelhamento máximo em G . Podemos supor que cada componente de $(V(G), M \triangle M^*)$ que tem mais de um vértice é um caminho M -aumentador. De fato, se H é um componente de $(V(G), M \triangle M^*)$ com mais de um vértice e não é um caminho M -aumentador, então o número de arestas de M em H é igual ao número de arestas de M^* em H , de modo que podemos tomar $M^* \triangle E(H)$ no lugar de M^* .

É fácil ver que cada caminho M -aumentador é um (S'', T') -caminho. Portanto, existem

$$|M^*| - |M| = \nu(G) - |V \setminus (S \cup T)| \quad (3.25)$$

(S, T) -caminhos disjuntos nos vértices em D .

Seja $U \subseteq V \setminus T$ e $W \subseteq V \setminus S$ tais que $K = U'' \cup W'$ é uma cobertura mínima por vértices em G . Vamos mostrar que

$$C := (U \cap S) \cup (U \cap W) \cup (W \cap T)$$

é (S, T) -desconector em D . Seja $P = v_0 \cdots v_k$ um (S, T) -caminho que não intersecta C . Podemos supor que o único vértice de P em S é v_0 e que o único vértice de P em T é v_k . Então $Q := v_0'' v_1' v_1'' \cdots v_{k-1}' v_{k-1}'' v_k'$ é um caminho em G de comprimento $2k - 1$. Logo, K intersecta Q em pelo menos $k = \lceil (2k - 1)/2 \rceil$ vértices, de modo que ou $v_0'' \in K$ (e portanto $v_0 \in U \cap S$), ou $v_k' \in K$ (e portanto $v_k \in W \cap T$), ou $v_i', v_i'' \in K$ para algum $0 < i < k$ (e portanto $v_i \in U \cap W$). Assim, C é (S, T) -desconector em D .

Observe que, para todo $v \in V \setminus (S \cup T)$, temos $v \in U \cup W$, pois caso contrário a aresta $v'v''$ não seria coberta por K . Assim, $V \setminus (S \cup T) = (U \cup W) \setminus (S \cup T)$. Também é fácil ver que os conjuntos $U \cap S$, $U \cap W$ e $W \cap T$ são mutuamente disjuntos. Além disso, $W \cap S = \emptyset = U \cap T$. Mas então

$$\begin{aligned} |C| &= |U \cap S| + |U \cap W| + |W \cap T| \\ &= |U \cap S| + |U| + |W| - |U \cup W| + |W \cap T| \\ &= |U| + |W| - (|U \cup W| - |U \cap S| - |W \cap T|) \\ &= |U| + |W| - |(U \cup W) \setminus (S \cup T)| \\ &= \tau(G) - |V \setminus (S \cup T)| \\ &= \nu(G) - |V \setminus (S \cup T)|, \end{aligned}$$

onde a última passagem é dada pelo teorema de emparelhamentos de Kőnig. Mas esse é justamente o número de (S, T) -caminhos disjuntos nos vértices que encontramos em (3.25). \square

Teorema 3.18

O teorema do fluxo máximo e corte mínimo implica o teorema de Menger, em sua versão orientada, disjunta nos arcos (corolário 3.6.2).

Demonstração: Basta tomar capacidade unitária para cada arco e aplicar o teorema do fluxo máximo e corte mínimo, em conjunto com a integralidade do fluxo máximo (corolário 3.11.2) e com o teorema 3.8 da decomposição de fluxos. \square

Teorema 3.19

O teorema de Menger, em sua versão orientada, disjunta nos arcos (corolário 3.6.2), implica o teorema do fluxo máximo e corte mínimo.

Demonstração: É suficiente provarmos o teorema do fluxo máximo e corte mínimo supondo que o vetor de capacidades $c \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^A$ é integral. Para tanto, basta substituir cada arco $a \in A$ por $c(a)$ arcos paralelos e aplicarmos o teorema de Menger, em sua versão orientada, disjunta nos arcos (corolário 3.6.2). \square

Sintetizamos as implicações anteriores no seguinte teorema:

Teorema 3.20 (Equivalência entre os resultados)

São equivalentes o teorema de emparelhamentos de König, o teorema do casamento de Hall, o teorema de Menger, em sua versão orientada, disjunta nos vértices (teorema 3.6), e o teorema do fluxo máximo e corte mínimo.

Demonstração: A equivalência entre o teorema de emparelhamentos de König e o teorema do casamento de Hall segue dos teoremas 3.14 e 3.15.

Para ver a equivalência entre o teorema de emparelhamentos de König e o teorema 3.6 de Menger, basta usar os teoremas 3.16 e 3.17, combinado ao fato de que o corolário 3.6.1 segue do teorema 3.6, como mostramos em (3.13).

Já mostramos também a equivalência entre o teorema de Menger, em sua versão orientada, disjunta nos arcos (corolário 3.6.2), e o teorema do fluxo máximo e corte mínimo: isso foi feito com os teoremas 3.18 e 3.19. Sabemos também que o teorema 3.6 implica o corolário 3.6.2. A implicação reversa vale pelas afirmações (3.14) e (3.13). Assim, o teorema 3.6 de Menger é equivalente ao teorema do fluxo máximo e corte mínimo.

Segue a equivalência entre os resultados mencionados. □

Observamos que as reduções apresentadas ao longo dessa seção fornecem algoritmos polinomiais para diversos dos problemas tratados, através do algoritmo de Edmonds-Karp para fluxos máximos.

Capítulo 4

Arborescências de comprimento mínimo

Neste capítulo, introduzimos um conceito em grafos orientados de certa forma análogo a árvores geradoras: as r -arborescências. Definimos também as ramificações, que num mesmo sentido são análogas orientadas de florestas. Se especificarmos uma raiz r , podemos definir ainda o conceito de r -cortes, análogos aos cortes.

O problema da árvore geradora de comprimento mínimo é um dos mais bem resolvidos da otimização combinatória, com algoritmos simples fortemente polinomiais (na verdade, quase lineares), relações min-max e caracterizações poliédricas. Vamos mostrar que este também é o caso para o problema da r -arborescência de comprimento mínimo.

O capítulo está organizado da seguinte maneira. A seção 4.1 define as estruturas de interesse e prova um resultado simples sobre anticadeias bloqueadoras, a fim de deixar que o leitor melhor familiarizado com os conceitos envolvidos. A seção 4.2 prova, através de técnicas combinatórias, uma poderosa relação min-max, da qual quase todos os demais resultados do capítulo seguem como corolários.

Na seção 4.3, abordamos o problema da r -arborescência de comprimento mínimo no contexto de programação linear, fornecendo uma caracterização poliédrica. Derivamos ainda uma segunda prova da relação min-max, desta vez utilizando poderosas técnicas poliédricas. Obtemos também uma formulação concisa do poliedro em questão.

Finalizamos o capítulo apresentando na seção 4.4 o algoritmo fortemente polinomial de Edmonds-Fulkerson para o problema da r -arborescência de comprimento mínimo. O algoritmo segue facilmente da prova da relação min-max apresentada na seção 4.2. Descrevemos detalhadamente o algoritmo e mostramos que outros problemas podem ser resolvidos em tempo polinomial através de uma redução para o problema da r -arborescência de comprimento mínimo.

4.1 Conceitos básicos

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado. Uma *ramificação* é um subconjunto $B \subseteq A$ tal que o grafo subjacente a (V, B) é acíclico e todo vértice é ponta final de no máximo um arco em B . Uma *raiz* de uma ramificação B é um vértice que não é ponta final de nenhum arco em B . É evidente que existe uma única raiz de B em cada componente fraco do grafo (V, B) .

Uma *arborescência* é uma ramificação B tal que o grafo (V, B) é fracamente conexo, isto é, uma ramificação que tem uma única raiz. Se r é tal raiz, então B é uma *r -arborescência*.

Claramente B é uma r -arborescência se, e somente se, o grafo não-orientado subjacente a (V, B) é uma árvore e, para qualquer vértice $v \in V$ distinto de r , existe um (r, v) -caminho em B . É evidente também que D tem uma r -arborescência se, e somente se, existe um (r, v) -caminho em D para todo vértice $v \in V$, distinto de r .

Fixado $r \in V$, um *r -corte* é um subconjunto de arcos da forma $\delta^{\text{in}}(U)$ para algum $\emptyset \neq U \subseteq V \setminus \{r\}$.

É evidente que, se B é uma r -arborescência e C é um r -corte, então $B \cap C \neq \emptyset$. O teorema a seguir mostra uma relação muito mais forte entre r -arborescências e r -cortes.

Teorema 4.1

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado e $r \in V$. Seja \mathcal{B} o conjunto de todas as r -arborescências e \mathcal{C} o conjunto de todos os r -cortes minimais em D . Então \mathcal{B} e \mathcal{C} formam um par de anticadeias bloqueadoras.

Demonstração: Começamos notando que \mathcal{C} é obviamente uma anticadeia. É claro também que \mathcal{B} é uma anticadeia, já que todos seus membros têm a mesma cardinalidade.

Pelo teorema 2.2, basta mostrar que $\mathcal{C} = b(\mathcal{B})$. A afirmação é trivialmente verdadeira se D não tem r -arborescências. Suponha então que $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

Seja $C \in \mathcal{C}$ um r -corte minimal. Como $C \cap B \neq \emptyset$ para toda r -arborescência $B \in \mathcal{B}$, então $C \supseteq T$ para algum $T \in b(\mathcal{B})$. Temos assim que,

$$\text{se } C \in \mathcal{C}, \text{ então } C \supseteq T \text{ para algum } T \in b(\mathcal{B}). \quad (4.1)$$

Seja $T \in b(\mathcal{B})$. Como T intersecta toda r -arborescência em D , então $D - T$ não tem r -arborescências. Seja U o conjunto de vértices u tais que não existe (r, u) -caminho em $D - T$. É claro que $\emptyset \neq U \subseteq V \setminus \{r\}$. Tome $C' := \delta_D^{\text{in}}(U)$. Afirmamos que $C' \subseteq T$. De fato, suponha que existe um arco (x, y) em $C' \setminus T$. Então $x \notin U$, ou seja, existe um (r, x) -caminho em $D - T$. Tal caminho, concatenado com o arco $(x, y) \notin T$, é um (r, y) -caminho em $D - T$, o que contradiz $y \in U$. Assim,

Se $T \in b(\mathcal{B})$, então $T \supseteq C$ para algum r -corte C . (4.2)

Seja $C \in \mathcal{C}$. Por (4.1) e (4.2), existem $T \in b(\mathcal{B})$ e um r -corte C' tais que $C \supseteq T \supseteq C'$. Como C é um r -corte minimal, então $C = T = C'$. Assim $C \in b(\mathcal{B})$, e portanto $\mathcal{C} \subseteq b(\mathcal{B})$.

Seja $T \in b(\mathcal{B})$. Por (4.2), existe um r -corte C tal que $T \supseteq C$. Seja $C' \subseteq C$ um r -corte minimal. Por (4.1), existe $T' \in b(\mathcal{B})$ com $C' \supseteq T'$. Temos então $T \supseteq C \supseteq C' \supseteq T'$. Como $b(\mathcal{B})$ é uma anticadeia, então $T = C = C' = T'$. Segue que $T \in \mathcal{C}$, e portanto $b(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{C}$, como queríamos. \square

O teorema 4.1 reforça a analogia entre r -arborescências e r -cortes em grafos orientados e árvores geradoras e cortes em grafos não-orientados, já que um resultado absolutamente análogo vale para estas estruturas.

É claro que qualquer algoritmo genérico de busca, como busca em largura ou busca em profundidade, pode ser utilizado para encontrar uma r -arborescência num grafo D , ou decidir que D não admite nenhuma r -arborescência. Como certificado de inexistência, o algoritmo poderia devolver um r -corte vazio.

4.2 O teorema da arborescência ótima

Apresentamos agora uma relação min-max descoberta independentemente por Fulkerson [Ful74] e Bock [Boc71], e que já aparecia de forma implícita num algoritmo de Edmonds [Edm67].

Teorema 4.2 (Teorema da arborescência ótima)

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado. Seja $r \in V$ e $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^A$ uma função comprimento. Suponha que D contém uma r -arborescência. Então o comprimento mínimo de uma r -arborescência é igual ao tamanho máximo de uma família de r -cortes tal que cada arco a está presente em no máximo $\ell(a)$ dos r -cortes.

Demonstração: É fácil ver que o máximo não pode ser maior do que o mínimo. De fato, seja \mathcal{F} uma família de r -cortes tal que cada arco a está presente em no máximo $\ell(a)$ dos membros de \mathcal{F} . Seja B uma r -arborescência. Por contagem dupla, e utilizando o fato de que $B \cap C \neq \emptyset$ para todo r -corte C , temos

$$\begin{aligned} \ell(B) &= \sum_{a \in B} \ell(a) \geq \sum_{a \in B} |\{C \in \mathcal{F} : a \in C\}| \\ &= \sum_{C \in \mathcal{F}} |B \cap C| \geq \sum_{C \in \mathcal{F}} 1 = |\mathcal{F}|. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Vamos mostrar que vale a igualdade por indução em $\ell(A)$.

Seja $A_0 := \{a \in A : \ell(a) = 0\}$. Se A_0 contém uma r -arborescência, então o comprimento mínimo é 0, e é claro que o tamanho máximo de uma família

de r -cortes como pedida é pelo menos 0. Em particular, vale a base da indução.

Suponha então que A_0 não contém uma r -arborescência. Então existe um componente forte K do grafo (V, A_0) tal que $r \notin V_K := V(K)$ e $\delta_{A_0}^{\text{in}}(V_K) = \emptyset$, ou seja, $\ell(a) > 0$ para todo arco $a \in \delta^{\text{in}}(V_K)$. De fato, se $\delta_{A_0}^{\text{in}}(V_K) \neq \emptyset$ para todo componente forte K de (V, A_0) que não contém r , então A_0 conteria uma r -arborescência.

Temos então $\ell(a) > 0$ para todo $a \in \delta^{\text{in}}(V_K)$. Tome $\ell' := \ell - \chi^{\delta^{\text{in}}(V_K)}$, isto é, diminua o comprimento de cada arco de $\delta^{\text{in}}(V_K)$ em uma unidade. Por indução, existem uma r -arborescência B e r -cortes C_1, \dots, C_t tais que $\ell'(B) = t$ e cada arco $a \in B$ está em no máximo $\ell'(a)$ dos r -cortes C_i .

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $|B \cap \delta_A^{\text{in}}(V_K)| = 1$. De fato, suponha que $|B \cap \delta_A^{\text{in}}(V_K)| \geq 2$. Como K é um componente forte de (V, A_0) , então para todo $a \in B \cap \delta_A^{\text{in}}(V_K)$, o conjunto $(B \setminus \{a\}) \cup A_0$ contém uma r -arborescência B' de comprimento $\ell'(B') \leq \ell'(B) - \ell'(a) \leq \ell'(B)$.

Segue de $|B \cap \delta_A^{\text{in}}(V_K)| = 1$ que $\ell(B) = \ell(B') + 1 = t + 1$. Tome agora $C_{t+1} := \delta_A^{\text{in}}(V_K)$. Temos então que cada arco $a \in B$ está presente em no máximo $\ell(a)$ dentre os r -cortes C_1, \dots, C_{t+1} , como queríamos. \square

É fácil ver na demonstração acima que $|B \cap C_i| = 1$ para cada um dos r -cortes C_i e que, para todo arco $a \in B$, o número $\ell(a)$ coincide com o número de r -cortes C_i tais que $a \in C_i$.

Note que o teorema da arborescência ótima é absolutamente análogo a um resultado min-max sobre grafos não-orientados relacionando árvores geradoras de comprimento mínimo e cortes.

4.3 Abordagem poliédrica

4.3.1 O politopo das r -arborescências

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado e fixe $r \in V$. Defina o *politopo das r -arborescências de D* como

$$P_{r\text{-arbs}}(D) := \text{fecho. conv} \{ \chi^B : B \text{ é uma } r\text{-arborescência de } D \}. \quad (4.4)$$

Defina também o poliedro dominante de $P_{r\text{-arbs}}(D)$ como

$$P_{r\text{-arbs}}^\uparrow(D) := P_{r\text{-arbs}}(D) + \mathbb{R}_{\geq 0}^A. \quad (4.5)$$

Os resultados a seguir mostrarão sistemas de inequações que determinam os poliedros $P_{r\text{-arbs}}(D)$ e $P_{r\text{-arbs}}^\uparrow(D)$.

Corolário 4.2.1

O sistema (4.6) é TDI.

$$\begin{aligned} x_a &\geq 0 && \text{para todo } a \in A, \\ x(\delta^{\text{in}}(U)) &\geq 1 && \text{para todo } r\text{-corte } \delta^{\text{in}}(U). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Demonstração: Seja $\ell \in \mathbb{Z}^A$ uma função comprimento. O problema dual de minimizar $\ell^\top x$ sobre (4.6) é maximizar $\sum_U y_U$ sujeito a

$$\begin{aligned} y_U &\geq 0 && \text{para todo } U, \\ \sum_U y_U \chi^{\delta^{\text{in}}(U)} &\leq \ell, \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde U é tomado sobre todos os conjuntos não-vazios de $V \setminus \{r\}$. A última restrição de (4.7) pode ser lida assim: para cada arco $a \in A$, vale que

$$\sum_{a \in \delta^{\text{in}}(U)} y_U \leq \ell(a). \quad (4.8)$$

Podemos supor que ao menos um $x \in \mathbb{R}^A$ satisfaz o sistema (4.6) e que $\ell_a \geq 0$ para todo arco a , pois caso contrário o problema de minimizar $\ell^\top x$ sobre (4.6) é inviável ou ilimitado, de modo que seu dual não tem valor ótimo finito.

Seja B uma r -arborescência de comprimento mínimo e \mathcal{F} uma família máxima como no teorema da arborescência ótima. Para cada r -corte $\delta^{\text{in}}(U)$, tome y_U como o número de vezes que $\delta^{\text{in}}(U)$ aparece em \mathcal{F} . Tome ainda $x := \chi^B$. Claramente x satisfaz (4.6) e y satisfaz (4.7). Além disso, pelo teorema da arborescência ótima, temos $\ell^\top x = \sum_U y_U$, de modo que x e y são soluções ótimas no primal e no dual, respectivamente. Como o vetor y é integral, segue que o sistema (4.6) é TDI. \square

Corolário 4.2.2

O poliedro $P_{r\text{-arbs}}^\uparrow(D)$ é determinado pelo sistema (4.6).

Demonstração: Seja Q o poliedro determinado por (4.6). Já observamos que $B \cap C \neq \emptyset$ para toda r -arborescência B e todo r -corte C , de modo que $\chi^B \in Q$ para toda r -arborescência B . Resta mostrarmos que todo vértice de Q é vetor de incidência de uma r -arborescência.

Seja x um vértice de Q . Pelo corolário 4.2.1, o vetor x é integral. Pelo teorema 4.1, os subconjuntos minimais de A que intersectam cada r -corte são as r -arborescências, de modo que $x \geq \chi^B$ para alguma r -arborescência B .

Temos $\chi^B \in Q$ e $2x - \chi^B = x + (x - \chi^B) \in Q$. Entretanto, como $x = (\chi^B + (2x - \chi^B))/2$, temos necessariamente $\chi^B = 2x - \chi^B$, pois x é um vértice de Q e então não pode ser combinação convexa não-trivial de outros vetores de Q . Segue que $x = \chi^B$, como queríamos. \square

Corolário 4.2.3

O sistema (4.9) é TDI.

$$\begin{aligned} x_a &\geq 0 && \text{para todo } a \in A, \\ x(\delta^{\text{in}}(U)) &\geq 1 && \text{para todo } r\text{-corte } C, \\ x(\delta^{\text{in}}(v)) &= 1 && \text{para todo } v \in V. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Demonstração: Basta combinar o corolário 4.2.1 com o teorema 2.14, já que o sistema (4.9) é obtido do sistema (4.6) transformando algumas das desigualdades em igualdades. \square

Corolário 4.2.4

O poliedro $P_{r\text{-arbs}}(D)$ é determinado pelo sistema (4.9).

Demonstração: Seja Q o poliedro determinado pelo sistema (4.9).

É evidente que $\chi^B \in Q$ para toda r -arborescência B de D , de modo que $P_{r\text{-arbs}}(D) \subseteq Q$.

Para provar a inclusão reversa, vamos mostrar que todo vértice de Q é vetor de incidência de uma r -arborescência de D . Seja x um vértice de Q . Pelo corolário 4.2.3, o vetor x é integral.

Afirmamos que $x_a \in \{0, 1\}$ para todo arco a que tem ponta final em algum vértice $v \neq r$, e que $x_a = 0$ para todo arco a com ponta final em r . De fato, se $x_a > 1$ para algum arco $a = (u, v)$, com $v \neq r$, então $x(\delta^{\text{in}}(v)) > 1$, um absurdo. Suponha agora que $x_a > 0$ para algum $a \in \delta^{\text{in}}(r)$. Tome os vetores $x', x'' \in \mathbb{R}^A$ colocando $x'_a := 0$ e $x''_a := 2x_a$ para o arco a e $x'_b := x_b$ para todo $b \in A \setminus \{a\}$. Mas então $x = (x' + x'')/2$ e, ademais, $x', x'' \in Q$, o que é um absurdo, já que um vértice de Q não pode ser combinação convexa não-trivial de outros vetores de Q .

Temos então que $x = \chi^B$ para algum $B \subseteq A \setminus \delta^{\text{in}}(r)$. Vamos mostrar que B é uma r -arborescência. É evidente que cada vértice $v \neq r$ é ponta final de exatamente um arco de B . Resta apenas mostrarmos que o grafo subjacente a (V, B) é acíclico. Disso seguirá que (V, B) é fracamente conexo, pois a aciclicidade do grafo subjacente a (V, B) e o fato de que $|B| = |V| - 1$ implicam que o grafo subjacente a (V, B) é uma árvore, como afirma o teorema 2.3.

Suponha então que o grafo subjacente a (V, B) não é acíclico. Seja C um subgrafo de (V, B) cujo grafo subjacente é um circuito. É evidente que C é um circuito em D : caso contrário, existe um vértice v em C que é ponta final de dois arcos de B . Além disso, C não passa por r , já que $B \subseteq A \setminus \delta^{\text{in}}(r)$. Mas então $x(\delta^{\text{in}}(U)) = 0$ para $U := V(C)$, pois um arco $a = (u, v)$ em $B \cap \delta^{\text{in}}(U)$ implicaria que $x(\delta^{\text{in}}(v)) \geq 2$, um absurdo.

Segue que B é uma r -arborescência, como queríamos. \square

Vejam agora como resolver o problema da separação para o poliedro $P_{r\text{-arbs}}(D)$ em tempo polinomial. Dado um vetor $x \in \mathbb{R}^A$, queremos decidir se $x \in P_{r\text{-arbs}}(D)$ e, se esse não for o caso, encontrar uma restrição violada no sistema (4.9).

É trivial verificar se x é não-negativo e se $x(\delta^{\text{in}}(v)) = 1$ para todo vértice $v \neq r$. Resta apenas verificarmos se $x(\delta^{\text{in}}(U)) \geq 1$ para todo r -corte $\delta^{\text{in}}(U)$. Mas isso também pode ser feito em tempo polinomial, como se segue.

Para cada arco $a \in A$, considere x_a como a capacidade do arco a . Agora, para cada vértice $v \neq r$, encontre um (r, v) -corte de capacidade mínima.

Se para algum vértice $v \neq r$, a capacidade mínima de um (r, v) -corte C for estritamente menor que 1 (com relação ao vetor de capacidades x), é evidente que x não está em $P_{r\text{-arbs}}(D)$, pois $x(C) < 1$ e C é um r -corte. Por outro lado, se para todo $v \neq r$, a capacidade mínima de um (r, v) -corte for pelo menos 1, então é claro que $x \in P_{r\text{-arbs}}(D)$.

Podemos então resolver o problema da separação relativo ao poliedro $P_{r\text{-arbs}}(D)$ através $|A| + |V|$ verificações triviais e mais $|V| - 1$ execuções de um algoritmo que encontra um (r, v) -corte de capacidade mínima, como por exemplo o algoritmo de Edmonds-Karp. Assim, o problema da separação pode ser resolvido em tempo polinomial. A equivalência entre separação e otimização, provada por Grötschel, Lovász e Schrijver [GLS88], em conjunto com os resultados de Frank e Tardos [FT87], implica então a existência de um algoritmo fortemente polinomial para o problema de encontrar uma r -arborescência de comprimento mínimo.

4.3.2 Descruzando cortes

No corolário 4.2.1, utilizamos o teorema da arborescência ótima para provar que o sistema (4.6) é TDI. Obtivemos assim um poderoso resultado poliédrico a partir do teorema da arborescência ótima, que foi provado de forma puramente combinatória.

Nesta seção, faremos o caminho inverso: provaremos que o sistema (4.6) é TDI utilizando métodos de programação linear, o que fornecerá uma prova poliédrica do teorema da arborescência ótima, que é essencialmente combinatório.

Na verdade, provaremos um resultado ainda mais forte: vamos ver que o sistema (4.6) é box-TDI.

A técnica ilustrada a seguir, introduzida por Edmonds e Giles [EG77] e Frank [Fra79b], é um caso especial dos métodos que envolvem fluxos submodulares, que generalizam diversos resultados min-max em grafos orientados.

Teorema 4.3

O sistema (4.6) é box-TDI.

Demonstração: Seja $\ell \in \mathbb{Z}^A$ uma função comprimento. Como na prova do corolário 4.2.1, podemos supor que $\ell \geq 0$. Seja y_U uma solução ótima para o problema dual de minimizar $\ell^\top x$ sobre (4.6), isto é, o vetor y_U maximiza $\sum_U y_U$ sobre (4.7), onde U é tomado sobre todos os subconjuntos não-vazios de $V \setminus \{r\}$.

Escolha a solução y_U de modo a minimizar

$$\sum_U y_U \cdot |U| \cdot |V \setminus U|. \quad (4.10)$$

Tome

$$\mathcal{F} := \{U : y_U > 0\}. \quad (4.11)$$

Vamos mostrar que a família \mathcal{F} é laminar.

Suponha o contrário. Isto é, suponha que existem U, W em \mathcal{F} tais que $U \cap W$ é não-vazio, $U \not\subseteq W$ e $W \not\subseteq U$. Temos ainda $U \cup W \neq V$, já que $r \notin U \cup W$. Tome $\alpha := \min\{y_U, y_W\}$. Diminua y_U e y_W de α e aumente $y_{U \cap W}$ e $y_{U \cup W}$ de α . Como

$$\chi^{\delta^{\text{in}}(U \cap W)} + \chi^{\delta^{\text{in}}(U \cup W)} \leq \chi^{\delta^{\text{in}}(U)} + \chi^{\delta^{\text{in}}(W)}, \quad (4.12)$$

então y continua satisfazendo (4.7). Ademais, $\sum_U y_U$ obviamente não mudou. Assim, y é uma solução ótima no dual. Entretanto, a soma (4.10) diminuiu, pelo teorema 2.1, contradizendo a escolha dos y_U . Segue que \mathcal{F} é laminar.

Defina da seguinte forma a matriz M , indexada por $\mathcal{F} \times A$:

$$M_{U,a} := \begin{cases} 1 & \text{se } a \in \delta^{\text{in}}(U); \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.13)$$

Note que a linha de M indexada por U é simplesmente $\chi^{\delta^{\text{in}}(U)} \in \mathbb{Z}^A$, isto é, o vetor de incidência de $\delta^{\text{in}}(U)$.

Vamos mostrar que M é uma matriz de rede. Defina uma árvore orientada $T_{\mathcal{F}'}$ da seguinte forma. Tome $V(T_{\mathcal{F}'}) := \mathcal{F}' := \mathcal{F} \cup \{V\}$. Para cada $U \in \mathcal{F}$, existe em $T_{\mathcal{F}'}$ um arco a_U indo de W para U , onde W é o menor conjunto de \mathcal{F}' que contém propriamente U . Note que $T_{\mathcal{F}'}$ é uma V -arborescência.

Defina também um grafo orientado $D_{\mathcal{F}'}$, com $V(D_{\mathcal{F}'}) := \mathcal{F}'$ e com conjunto de arcos dado do seguinte modo. Para cada arco (u, v) de D , seja $a_{\mathcal{F}'}$ um arco que tem como ponta inicial o menor conjunto de \mathcal{F}' contendo ambos u e v e como ponta final o menor conjunto de \mathcal{F}' contendo v . Tome $A_{\mathcal{F}'} := \{a_{\mathcal{F}'} : a \in A\}$ como o conjunto de arcos de $D_{\mathcal{F}'}$.

Não é difícil ver que a matriz de rede gerada por $D_{\mathcal{F}'}$ e $T_{\mathcal{F}'}$ é uma matriz idêntica a M , onde identificamos um conjunto U de \mathcal{F} com um arco a_U de $T_{\mathcal{F}'}$ e um arco a de D com um arco $a_{\mathcal{F}'}$ de $D_{\mathcal{F}'}$. Assim, a matriz M é uma matriz de rede e é, portanto, totalmente unimodular, pelo teorema 2.12. Segue do teorema 2.15 que o sistema (4.6) é box-TDI. \square

4.3.3 Uma formulação concisa

Mostramos no corolário 4.2.2 que o poliedro $P_{r\text{-arbs}}^\uparrow(D)$ é determinado pelo sistema (4.6). Esse sistema, entretanto, tem um número exponencial de restrições, relativo ao tamanho da representação do grafo D . Assim, a descrição dada por (4.6) nos obriga a trabalhar com $P_{r\text{-arbs}}^\uparrow(D)$ através do método das elipsóides, com seu pesado arcabouço de divisão, arredondamento e aproximação.

Nesta seção, veremos uma descrição concisa do poliedro $P_{r\text{-arbs}}^\uparrow(D)$, isto é, esse poliedro admite uma representação que tem tamanho polinomial em

$|V| + |A|$. Mais precisamente, vamos mostrar que $P_{r\text{-arbs}}^\uparrow(D)$ é a projeção de um poliedro determinado por um sistema que tem tamanho polinomial em $|V| + |A|$. Esse resultado é de Wong [Won84] e Maculan [Mac86].

Teorema 4.4

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado e $r \in V$. Então o poliedro $P_{r\text{-arbs}}^\uparrow(D)$ é justamente o conjunto dos vetores $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^A$ tais que, para cada vértice $u \in V \setminus \{r\}$, existe um (r, u) -fluxo sujeito a x e de valor 1.

Demonstração: Seja Q o conjunto dos vetores $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^A$ tais que, para cada vértice $u \in V \setminus \{r\}$, existe um (r, u) -fluxo sujeito a x e de valor 1. É óbvio que Q é um poliedro do tipo bloqueador.

É claro que, se B é uma r -arborescência em D , então $\chi^B \in Q$. Assim, $P_{r\text{-arbs}}^\uparrow(D) \subseteq Q$.

Para a inclusão reversa, seja $x \in Q$. Para cada vértice $u \in V \setminus \{r\}$, denote por f_u o valor de um (r, u) -fluxo máximo sujeito a x . Então, para todo $\emptyset \neq U \subseteq V \setminus \{r\}$, temos

$$x(\delta^{\text{in}}(U)) \geq f_u(\delta^{\text{in}}(U)) \geq 1,$$

onde u é qualquer vértice de U . Assim, pelo corolário 4.2.2, temos que $x \in P_{r\text{-arbs}}^\uparrow(D)$, de modo que $Q \subseteq P_{r\text{-arbs}}^\uparrow(D)$. \square

Considere o poliedro definido pelo sistema

$$\begin{aligned} x_a &\geq 0 && \text{para todo } a \in A, \\ 0 \leq z_{u,a} &\leq x_a && \text{para todos } a \in A \text{ e } u \in V \setminus \{r\}, \\ \sum_{a \in \delta^{\text{in}}(v)} z_{u,a} &= \sum_{a \in \delta^{\text{out}}(v)} z_{u,a} && \text{para todos } u, v \in V \setminus \{r\}, v \neq u. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Segue do teorema 4.4 que o poliedro $P_{r\text{-arbs}}^\uparrow(D)$ é a projeção do poliedro determinado pelo sistema (4.14) nas coordenadas de A .

4.4 O algoritmo de Edmonds-Fulkerson

Consideramos agora o problema de encontrar uma r -arborescência de comprimento mínimo num grafo orientado $D = (V, A)$, relativo a uma função comprimento $\ell \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^A$, através de um algoritmo puramente combinatório, isto é, que não faça qualquer referência explícita a programação linear.

Começamos notando que, para encontrar uma r -arborescência de comprimento mínimo num grafo orientado $D = (V, A)$, não podemos utilizar um algoritmo guloso ingênuo que começa a partir da raiz r e iterativamente estende uma r -arborescência a partir de um subconjunto U de V , sempre tomando o arco de comprimento mínimo que sai de U . Isto é, não é suficiente modificar de forma ingênua o algoritmo de Prim [Pri57] para árvores geradoras de comprimento mínimo em grafos não-orientados. De fato, o grafo da figura 4.1 mostra um exemplo em que essa estratégia falha.

As demonstrações do teorema da arborescência ótima e do corolário 4.2.2 nos sugerem o seguinte algoritmo para encontrar uma r -arborescência de comprimento mínimo (relativo a uma função comprimento $\ell \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^A$) num grafo orientado D :

EDMONDS-FULKERSON(D, r, ℓ)

- 1 se não existe uma r -arborescência em D
- 2 **então** devolva “impossível” e um r -corte vazio
- 3 $A_0 \leftarrow \{a \in A(D) : \ell(a) = 0\}$
- 4 se existe uma r -arborescência B em $(V(D), A_0)$
- 5 **então** $y(U) \leftarrow 0$ para todo $\emptyset \neq U \subseteq V(D) \setminus \{r\}$
- 6 devolva B e y
- 7 seja K um componente forte de $(V(D), A_0)$
 tal que $r \notin V_K := V(K)$ e $\ell(a) > 0$ para todo $a \in \delta^{\text{in}}(V_K)$
- 8 $\alpha \leftarrow \min \{\ell(a) : a \in \delta^{\text{in}}(V_K)\}$
- 9 $\ell' \leftarrow \ell - \alpha \chi^{\delta^{\text{in}}(V_K)} \quad \triangleright$ diminua de α os comprimentos de $\delta^{\text{in}}(V_K)$
- 10 $D' \leftarrow D/V_K \quad \triangleright$ contraia os vértices de V_K para obter D'
- 11 $\ell'' \leftarrow \ell'|_{A(D')} \quad \triangleright$ ℓ'' é ℓ' restrito a $A(D')$
- 12 $B', y' \leftarrow \text{EDMONDS-FULKERSON}(D', r, \ell'')$
- 13 seja $a' = (u, V_K) \in B'$ o arco de B' que tem V_K como ponta final
- 14 seja $(u, w) \in A(D)$ o arco correspondente ao arco a'
- 15 seja B_K uma w -arborescência de K com $\ell(B_K) = 0$
- 16 $B \leftarrow (B' \setminus \{a'\}) \cup \{(u, w)\} \cup B_K$
- 17 $y(U) \leftarrow 0$ para todo $\emptyset \neq U \subseteq V(D) \setminus \{r\}$
- 18 $y(U) \leftarrow y'(U)$ para cada $\emptyset \neq U \subsetneq V(D) \setminus (\{r\} \cup V_K)$
- 19 $y(U) \leftarrow y'(U')$ para cada $V_K \subsetneq U \subseteq V(D) \setminus \{r\}$,
 onde $U' := (U \setminus V_K) \cup \{V_K\}$
- 20 $y(V_K) \leftarrow \alpha$
- 21 devolva B e y

Vamos descrever informalmente o algoritmo EDMONDS-FULKERSON. Ele pode ser visto como um algoritmo guloso em duas fases: na primeira, buscamos uma r -arborescência de comprimento nulo. Se tal r -arborescência não existe, partimos para a segunda fase, em que encontramos um arco de comprimento mínimo em algum componente forte inacessível via arcos de comprimento nulo.

É importante ter em mente que toda resposta desse algoritmo vem acompanhada de um certificado. No caso em que não existe uma r -arborescência, o algoritmo devolve como certificado um r -corte vazio. Já para certificar a otimalidade de alguma r -arborescência B encontrada, devolveremos um vetor y que é solução viável do dual de minimizar $\ell^\top x$ sujeito a $x \in P_{r\text{-arbs}}(D)$ e tal que $\sum_U y_U = \ell(B)$.

É evidente que, se quisermos que o algoritmo EDMONDS-FULKERSON seja polinomial, não podemos trabalhar com um vetor y_U explicitamente

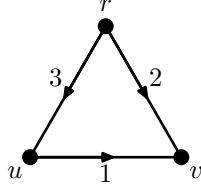


Figura 4.1: Uma estratégia gulosa ingênua não funciona para encontrar uma r -arborescência de comprimento mínimo.

para todo $\emptyset \neq U \subseteq V \setminus \{r\}$. Mas isso não é um problema. Podemos manter apenas uma lista L dos subconjuntos $\emptyset \neq U \subseteq V \setminus \{r\}$ tais que $y_U > 0$, bem como o valor de y_U para cada $U \in L$. Para todos os demais $\emptyset \neq U \subseteq V \setminus \{r\}$ que não estão em L , fica convencionado que $y_U = 0$. Ficará claro, com a explicação do algoritmo, que o tamanho da lista L é limitado polinomialmente.

As linhas 1–2 verificam se existe alguma r -arborescência em D . Para tanto, basta verificar se existe um (r, v) -caminho para cada vértice $v \neq r$. Se existe algum vértice $v \neq r$ inacessível a partir de r em D , podemos facilmente encontrar um r -corte vazio: basta tomar como U o conjunto dos vértices u tais que existe um (u, v) -caminho em D . Desse modo, $\delta^{\text{in}}(U)$ é um r -corte vazio e certifica a inexistência de uma r -arborescência em D . Assim, esse passo pode ser implementado com qualquer busca genérica, como busca em largura ou busca em profundidade, e consome tempo $O(n + m)$.

As linhas 3–6 constituem a primeira fase gulosa do algoritmo, bem como a base da recursão. Elas buscam uma r -arborescência de comprimento nulo em D . Se tal r -arborescência existe, então ela certamente é de comprimento mínimo. Observe que devolvemos tanto uma r -arborescência de custo mínimo como um vetor y que serve como certificado de otimalidade da r -arborescência devolvida. Note que esse passo também pode ser implementado com alguma busca genérica, e portanto consome tempo $O(n + m)$.

Caso não haja uma r -arborescência de comprimento nulo, deve existir um componente forte K que não contém r e tal que todo arco que entra em K tem comprimento positivo. Agora passamos para a segunda fase gulosa do algoritmo: encontramos um tal componente forte K e, dentre os arcos que entram em K , tomamos o arco de menor comprimento. As linhas 7–8 se encarregam dessas tarefas. É fácil implementar esses passos de modo que o consumo de tempo seja $O(n + m)$, utilizando busca em profundidade.

Nas linhas 9–11, preparamos uma instância para uma chamada recursiva. Para tanto, começamos alterando a função comprimento ℓ , diminuindo de α o comprimento dos arcos que entram em K . A função comprimento

resultante é ℓ' . Agora contraímos em D os vértices de K e chamamos de ℓ'' a restrição de ℓ' aos arcos correspondentes do grafo contraído D' . Todos esses passos podem ser trivialmente implementados de modo a consumir tempo $O(n + m)$.

Na linha 12, fazemos uma chamada recursiva, obtendo uma r -arborescência B' e um certificado y' da otimalidade de B' .

Resta apenas alterarmos de forma óbvia tanto B' quanto y' para finalizarmos o algoritmo. As linhas 13–20 se encarregam dessa alteração. Para alterar B' , procedemos da seguinte maneira. Começamos descobrindo a qual arco de D corresponde o arco de D' que tem ponta final no vértice contraído V_K . Digamos que o arco de D correspondente tem ponta final em $w \in V_K$. Agora basta encontrar em K uma w -arborescência e encaixá-la de forma apropriada em B' . A alteração de y é bastante técnica, porém óbvia.

A linha 21 pode agora devolver a r -arborescência mínima encontrada e seu certificado de otimalidade.

A corretude do algoritmo EDMONDS-FULKERSON é imediata do teorema da arborescência ótima e do corolário 4.2.2.

Para verificar que ele consome tempo polinomial, comece notando que, a cada chamada recursiva, ao menos um arco de D passa a ter comprimento nulo. Assim, após no máximo m chamadas recursivas, certamente atingiremos a base da recursão, isto é, existirá uma r -arborescência de comprimento nulo. É fácil ver também que no máximo m conjuntos $\emptyset \neq U \subseteq V \setminus \{r\}$ terão y_U positivo: a cada chamada recursiva, apenas um y_U recebe um valor positivo, e todos os outros y_U são idênticos aos valores devolvidos pela chamada recursiva anterior.

Logo, o algoritmo consome tempo $O(m(n + m))$ no pior caso. Concluímos que o algoritmo EDMONDS-FULKERSON é fortemente polinomial.

Observamos que o algoritmo apresentado é uma versão modificada dos algoritmos propostos por Edmonds [Edm67] e por Fulkerson [Ful74].

4.4.1 Problemas relacionados

O algoritmo EDMONDS-FULKERSON pode ser utilizado para resolver diversos problemas de otimização relacionados ao da r -arborescência de comprimento mínimo.

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado e r um vértice de V .

Dado $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^A$, o algoritmo EDMONDS-FULKERSON resolve automaticamente o problema de encontrar uma família máxima de r -cortes tal que cada arco a está em presente em no máximo $\ell(a)$ dentre os r -cortes da família.

Suponha agora que temos $\ell \in \mathbb{Q}^A$ como uma função comprimento, com alguns componentes possivelmente negativos, e que queremos encontrar uma r -arborescência de comprimento máximo. Seja $L := \max \{ \ell(a) : a \in A \}$ e tome $\ell'(a) := L - \ell(a)$ para cada arco a . Agora basta executar o algoritmo EDMONDS-FULKERSON(D, r, ℓ').

Se especificarmos uma função comprimento $\ell \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^A$ e quisermos encontrar uma arborescência de comprimento mínimo, sem pré-estabelecer a raiz, basta executar o algoritmo EDMONDS-FULKERSON para cada possível escolha de raiz e verificar qual delas tem o menor comprimento. Uma outra forma é a seguinte: crie um vértice novo r e arcos (r, v) para todo vértice v de D . Chame o grafo resultante de D' . Estenda também a função comprimento ℓ , tomando $L|V|$ como o comprimento de cada arco novo (r, v) , onde $L := \max \{ \ell(a) : a \in A \}$. Agora basta executar o algoritmo EDMONDS-FULKERSON(D', r, ℓ).

Por fim, suponha que temos uma função comprimento $\ell \in \mathbb{Q}^A$, com alguns componentes possivelmente negativos, e que queremos encontrar uma ramificação de comprimento máximo. Começamos removendo os arcos de comprimento negativo, já que esses certamente não farão parte de uma solução ótima. Agora basta criar um vértice novo r e arcos (r, v) para todo vértice v de D , sendo que cada arco novo tem comprimento 0. Seja D' o grafo resultante. Seja B uma r -arborescência de comprimento máximo em D' , cuja obtenção foi explicada num parágrafo anterior. Agora é claro que $B \cap A$ é uma ramificação de comprimento máximo em D .

Cabe ainda mencionar que r -arborescências são as bases comuns de dois matróides. De fato, seja M_1 o matróide das florestas de D , visto como um grafo não-orientado, e seja M_2 o matróide transversal induzido pelos conjuntos $\delta^{\text{in}}(v)$, para todo vértice $v \neq r$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que nenhum arco de D entra em r . É fácil ver que $B \subseteq A$ é uma r -arborescência se, e somente se, B é uma base comum de M_1 e de M_2 . Assim, qualquer algoritmo fortemente polinomial para intersecção de matróides com pesos, como por exemplo o algoritmo primal-dual de Frank [Fra81b], implica a existência de um algoritmo fortemente polinomial para o problema da r -arborescência de comprimento mínimo.

Capítulo 5

Ramificações disjuntas

No capítulo 4, consideramos o problema de encontrar r -arborescências de comprimento mínimo e famílias disjuntas máximas de r -cortes. Neste capítulo, os papéis se invertem: estudamos o problema de encontrar r -cortes de capacidade mínima e famílias disjuntas máximas de r -arborescências e, mais geralmente, de encontrar famílias disjuntas máximas de ramificações.

O capítulo está organizado da seguinte maneira. Na seção 5.1, provamos o poderoso teorema das ramificações disjuntas de Edmonds, a partir do qual derivaremos quase todos os demais resultados do capítulo. Na seção 5.2, estudamos o problema de encontrar famílias máximas de arborescências disjuntas com uma escolha prévia das raízes, inclusive do ponto de vista poliédrico. O mesmo problema é estudado na seção 5.3, desta vez sem prefixarmos as raízes. Finalizamos o capítulo com a seção 5.4, que aborda o problema de encontrar arborescências disjuntas de modo a minimizar a soma dos comprimentos.

5.1 O teorema das ramificações disjuntas

Vamos começar provando um lema auxiliar:

Lema 5.1

Sejam R_1, \dots, R_k subconjuntos de um conjunto finito V . Para todo $U \subseteq V$, defina $\theta(U) := \{i: R_i \cap U = \emptyset\}$ e $t(U) := |\theta(U)|$. Então a função $t(U)$ é supermodular, isto é, para quaisquer $U, W \subseteq V$, vale que

$$t(U \cup W) + t(U \cap W) \geq t(U) + t(W). \quad (5.1)$$

Ademais, vale a igualdade em (5.1) se, e somente se, $\theta(U \cap W) = \theta(U) \cup \theta(W)$.

Demonstração: Sejam $U, W \subseteq V$.

Temos $i \in \theta(U \cup W)$ se, e somente se, $R_i \cap (U \cup W) = \emptyset$, que ocorre se, e somente se, $(R_i \cap U) \cup (R_i \cap W) = \emptyset$. Assim, $i \in \theta(U \cup W)$ se e, somente

se, $i \in \theta(U) \cap \theta(W)$. Logo,

$$\theta(U \cup W) = \theta(U) \cap \theta(W). \quad (5.2)$$

Seja $i \in \theta(U) \cup \theta(W)$. Então $R_i \cap U = \emptyset$ ou $R_i \cap W = \emptyset$, de modo que $R_i \cap (U \cap W) = \emptyset$. Logo,

$$\theta(U \cap W) \supseteq \theta(U) \cup \theta(W). \quad (5.3)$$

Combinando (5.2) e (5.3), obtemos

$$\begin{aligned} t(U \cup W) + t(U \cap W) &= |\theta(U \cup W)| + |\theta(U \cap W)| \\ &\geq |\theta(U) \cap \theta(W)| + |\theta(U) \cup \theta(W)| \\ &= |\theta(U)| + |\theta(W)| \\ &= t(U) + t(W). \end{aligned}$$

É evidente que esta última relação vale com igualdade se, e somente se, vale a igualdade em (5.3). \square

Dados um grafo orientado $D = (V, A)$ e uma ramificação B de D , chamamos de *conjunto das raízes de B* ao conjunto de vértices de V que não são ponta final de nenhum arco de B . Denotamos por $R(B)$ o conjunto das raízes de B .

Agora estamos prontos para provar o teorema das ramificações disjuntas de Edmonds [Edm73].

Teorema 5.2 (Teorema das ramificações disjuntas)

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado e sejam R_1, \dots, R_k subconjuntos não-vazios de V . Então existem ramificações disjuntas B_1, \dots, B_k , com $R(B_i) = R_i$ para todo i , se e somente se,

$$d^{\text{in}}(U) \geq |\{i: R_i \cap U = \emptyset\}| \quad (5.4)$$

para todo $\emptyset \neq U \subseteq V$.

Demonstração (Lovász [Lov76]): A necessidade da condição (5.4) é óbvia. Vamos mostrar que ela é suficiente, por indução em $|V \setminus R_1| + \dots + |V \setminus R_k|$.

Para a base da indução, consideramos $R_1 = \dots = R_k = V$. Neste caso, o teorema é trivialmente verdadeiro. Para o passo da indução, podemos supor que $R_1 \neq V$.

Seja $\mathcal{R} := \{R_1, \dots, R_k\}$. Para todo $U \subseteq V$, defina

$$\theta(U; \mathcal{R}) := \{i: R_i \in \mathcal{R} \text{ e } R_i \cap U = \emptyset\} \quad (5.5)$$

e $t(U; \mathcal{R}) := |\theta(U; \mathcal{R})|$. Observe então que a condição (5.4) é equivalente a $d^{\text{in}}(U) \geq t(U; \mathcal{R})$ para todo $\emptyset \neq U \subseteq V$.

Seja $W \subseteq V$ um conjunto minimal tal que $W \cap R_1 \neq \emptyset$ e $W \setminus R_1 \neq \emptyset$ e, além disso, $d^{\text{in}}(W) = t(W; \mathcal{R})$. Observe que um tal conjunto certamente existe, dado que $W = V$ satisfaz essas condições.

É evidente que $t(W'; \mathcal{R}) \geq t(W; \mathcal{R})$ para todo $W' \subseteq W$. Como temos $1 \in \theta(W \setminus R_1; \mathcal{R})$ e $1 \notin \theta(W; \mathcal{R})$, então

$$d_D^{\text{in}}(W \setminus R_1) \geq t(W \setminus R_1; \mathcal{R}) > t(W; \mathcal{R}) = d_D^{\text{in}}(W). \quad (5.6)$$

Logo, existe um arco $a = (u, v) \in A$ com $u \in W \cap R_1$ e $v \in W \setminus R_1$. Agora basta mostrar que a condição (5.4) continua valendo ao trocarmos A por $A \setminus \{a\}$ e R_1 por $R_1 \cup \{v\}$, pois aí podemos aplicar a hipótese de indução e incluir o arco a em B_1 .

Seja então $D' := (V, A')$ um grafo orientado, com $A' := A \setminus \{a\}$, e sejam R'_1, \dots, R'_k uma família de subconjuntos de V , com $R'_1 := R_1 \cup \{v\}$ e $R'_i := R_i$ para $i = 2, \dots, k$. Tome $\mathcal{R}' := \{R'_1, \dots, R'_k\}$. Suponha que a condição (5.4) não vale para o grafo D' e para os conjuntos R'_1, \dots, R'_k , isto é, suponha que existe um $\emptyset \neq U \subseteq V$ tal que

$$d_{D'}^{\text{in}}(U) < t(U; \mathcal{R}'). \quad (5.7)$$

É claro então que

$$a \in \delta_D^{\text{in}}(U), \quad (5.8)$$

pois caso contrário teríamos $d_{D'}^{\text{in}}(U) = d_D^{\text{in}}(U) \geq t(U; \mathcal{R}) \geq t(U; \mathcal{R}')$. Logo,

$$d_{D'}^{\text{in}}(U) = d_D^{\text{in}}(U) - 1. \quad (5.9)$$

É claro também que $t(U; \mathcal{R}') \geq t(U; \mathcal{R}) - 1$. De fato, se $2 \leq i \leq k$, então $i \in \theta(U; \mathcal{R}')$ se, e somente se, $i \in \theta(U; \mathcal{R})$. Ademais, $t(U; \mathcal{R}') = t(U; \mathcal{R}) - 1$ se, e somente se, $1 \notin \theta(U; \mathcal{R}')$ e $1 \in \theta(U; \mathcal{R})$. Suponha, por contradição, que $t(U; \mathcal{R}') = t(U; \mathcal{R}) - 1$. Então

$$d_{D'}^{\text{in}}(U) = d_D^{\text{in}}(U) - 1 \geq t(U; \mathcal{R}) - 1 = t(U; \mathcal{R}'),$$

contradizendo a escolha do conjunto U . Logo,

$$t(U; \mathcal{R}) = t(U; \mathcal{R}'). \quad (5.10)$$

Mas então temos que ou $1 \notin \theta(U; \mathcal{R})$ e $1 \notin \theta(U; \mathcal{R}')$, ou então $1 \in \theta(U; \mathcal{R})$ e $1 \in \theta(U; \mathcal{R}')$. Como (5.8) implica que $v \in U$, então $1 \notin \theta(U; \mathcal{R}')$. Segue que $1 \notin \theta(U; \mathcal{R})$, ou seja,

$$R_1 \cap U \neq \emptyset. \quad (5.11)$$

De (5.9) e (5.10) segue que

$$d_D^{\text{in}}(U) = t(U; \mathcal{R}). \quad (5.12)$$

Assim, pela submodularidade da função $d^{\text{in}}(S)$, provada no lema 2.6, e pela supermodularidade da função $t(S; \mathcal{R})$, provada no lema 5.1, temos

$$\begin{aligned} d^{\text{in}}(U \cap W) &\leq d^{\text{in}}(U) + d^{\text{in}}(W) - d^{\text{in}}(U \cup W) \\ &\leq t(U; \mathcal{R}) + t(W; \mathcal{R}) - t(U \cup W; \mathcal{R}) \\ &\leq t(U \cap W; \mathcal{R}). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Como, por hipótese, $d^{\text{in}}(U \cap W) \geq t(U \cap W; \mathcal{R})$, segue que todas as desigualdades em (5.13) valem com igualdade.

Logo, $d^{\text{in}}(U \cap W) = t(U \cap W; \mathcal{R})$. Ademais, como vale a igualdade em (5.13), o lema 5.1 garante que $\theta(U \cap W; \mathcal{R}) = \theta(U; \mathcal{R}) \cup \theta(W; \mathcal{R})$. Assim, como $R_1 \cap U \neq \emptyset$ e $R_1 \cap W \neq \emptyset$, então $1 \notin \theta(U; \mathcal{R}) \cup \theta(W; \mathcal{R}) = \theta(U \cap W; \mathcal{R})$, ou seja, $R_1 \cap (U \cap W) \neq \emptyset$. Ademais, $(U \cap W) \setminus R_1 \neq \emptyset$, já que $v \in U \cap W$, e $U \cap W \subsetneq W$, já que (5.8) implica que $u \notin U$ e portanto $u \notin U \cap W$. Mas isso contradiz a escolha de W . \square

5.2 r -arborescências disjuntas

Através do poderoso teorema das ramificações disjuntas, podemos derivar facilmente condições necessárias e suficientes para a existência de arborescências disjuntas com raízes pré-determinadas:

Corolário 5.2.1

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado e sejam $r_1, \dots, r_k \in V$. Então existem k arborescências disjuntas B_1, \dots, B_k de D , tais que B_i é uma r_i -arborescência para cada i , se, e somente se, para todo $\emptyset \neq U \subseteq V$,

$$d^{\text{in}}(U) \geq |\{i: r_i \notin U\}|. \quad (5.14)$$

Demonstração: Imediato do teorema das ramificações disjuntas, tomando $R_i := \{r_i\}$ para todo i . \square

O caso em que todas as raízes são iguais já havia sido provado por Edmonds [Edm70]:

Corolário 5.2.2 (Teorema das arborescências disjuntas)

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado e $r \in V$. Então o número máximo de r -arborescências disjuntas é igual ao tamanho mínimo de um r -corte.

Demonstração: Imediato do corolário 5.2.1, tomando como k o tamanho mínimo de um r -corte e $r_i := r$ para todo i . \square

Notamos agora que o teorema das arborescências disjuntas implica o teorema de Menger, em sua versão orientada, disjunta nos arcos (corolário 3.6.2). De fato, seja $D = (V, A)$ um grafo orientado e sejam r, s vértices

distintos de D . Seja k o tamanho mínimo de um (r, s) -corte em D . Para cada vértice $v \neq s$, crie k arcos paralelos de s a v . Seja $D' = (V, A')$ o grafo resultante. É fácil ver que o tamanho mínimo de um r -corte em D' é k . Pelo teorema das arborescências disjuntas, existem r -arborescências disjuntas B_1, \dots, B_k em D' . Seja P_i o único (r, s) -caminho em B_i , para cada i . É evidente que P_i não passa por nenhum arco de $A' \setminus A$. Logo, P_1, \dots, P_k são (r, s) -caminhos em D disjuntos nos arcos, como queríamos.

O teorema das arborescências disjuntas também vale em sua versão capacitada:

Corolário 5.2.3

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado, $r \in V$ e $c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^A$ uma função capacidade. Então a capacidade mínima de um r -corte é igual ao tamanho máximo de uma família de r -arborescências tal que cada arco a está presente em no máximo $c(a)$ das r -arborescências.

Demonstração: Imediato do teorema das arborescências disjuntas, substituindo cada arco a por $c(a)$ arcos paralelos (isso significa que arcos de capacidade nula são removidos). \square

5.2.1 Abordagem poliédrica

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado. Fixe $r \in V$. Defina o *politopo dos r -cortes de D* como

$$P_{r\text{-cortes}}(D) := \text{fecho. conv} \{ \chi^C : C \text{ é um } r\text{-corte de } D \}. \quad (5.15)$$

Defina também o poliedro dominante de $P_{r\text{-cortes}}(D)$ como

$$P_{r\text{-cortes}}^\uparrow(D) := P_{r\text{-cortes}}(D) + \mathbb{R}_{\geq 0}^A. \quad (5.16)$$

O corolário 5.2.3 pode ser reformulado em termos de total dual integralidade.

Corolário 5.2.4

O sistema (5.17) é TDI.

$$\begin{aligned} x_a &\geq 0 && \text{para todo } a \in A, \\ x(B) &\geq 1 && \text{para toda } r\text{-arborescência } B. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Demonstração: Seja $c \in \mathbb{Z}^A$ uma função capacidade. O problema dual de minimizar $c^\top x$ sobre (5.17) é maximizar $\sum_B y_B$ sujeito a

$$\begin{aligned} y_B &\geq 0 && \text{para todo } B, \\ \sum_B y_B \chi^B &\leq c, \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde B é tomado sobre todas as r -arborescências de D . A última restrição de (5.18) pode ser lida assim: para cada arco $a \in A$, vale que

$$\sum_{a \in B} y_B \leq c(a). \quad (5.19)$$

Podemos supor que ao menos um $x \in \mathbb{R}^A$ satisfaz o sistema (5.17) e que $c(a) \geq 0$ para todo arco a , pois caso contrário o problema de minimizar $c^\top x$ sobre (5.17) é inviável ou ilimitado, de modo que seu dual não tem valor ótimo finito.

Seja C um r -corte de capacidade mínima e \mathcal{B} uma família de r -arborescências como no corolário 5.2.3. Para cada r -arborescência B de D , tome como y_B o número de vezes que B aparece em \mathcal{B} . Tome também $x := \chi^C$. É claro que x é viável em (5.17) e que y é viável em (5.18). Ademais, pelo corolário 5.2.3, $c^\top x = \sum_B y_B$, de modo que x e y são soluções ótimas no primal e no dual, respectivamente. Como o vetor y é integral, segue que o sistema (5.17) é TDI. \square

Corolário 5.2.5

O sistema (5.17) determina $P_{r\text{-cortes}}^\uparrow(D)$.

Demonstração: O resultado segue da teoria de poliedros bloqueadores (teorema 2.9), aplicada ao corolário 4.2.2. \square

5.3 Arborescências disjuntas

Todos os resultados vistos até agora sobre arborescências disjuntas dependem de uma escolha prévia das raízes. Vamos ver agora um teorema min-max de Frank [Fra79a, Fra81a], que utiliza o corolário 5.2.1 para determinar o número máximo de arborescências disjuntas, sem escolha prévia das raízes.

Dado um conjunto V , uma *subpartição de V* é uma partição de um subconjunto de V .

Corolário 5.2.6

Sejam $D = (V, A)$ um grafo orientado e $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Então existem k arborescências disjuntas em D se, e somente se,

$$\sum_{U \in \mathcal{P}} d^{\text{in}}(U) \geq k(|\mathcal{P}| - 1) \quad (5.20)$$

para toda subpartição \mathcal{P} de V que não tenha classes vazias.

Demonstração: Primeiro vamos ver a necessidade da condição (5.20). Suponha que D tem k arborescências disjuntas B_1, \dots, B_k . Seja \mathcal{P} uma subpartição de V sem classes vazias. Para cada i , a arborescência B_i tem pelo

menos um arco em $\delta^{\text{in}}(U)$ para cada classe $U \in \mathcal{P}$, exceto possivelmente uma, se a raiz de B_i estiver em alguma classe de \mathcal{P} . Assim

$$\sum_{U \in \mathcal{P}} |B_i \cap \delta^{\text{in}}(U)| \geq |\mathcal{P}| - 1. \quad (5.21)$$

Tomando a relação (5.21) para todo i , obtemos a necessidade de (5.20).

Agora vamos mostrar a suficiência de (5.20). Seja $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^V$ tal que

$$x(U) \geq k - d^{\text{in}}(U) \quad (5.22)$$

para todo $\emptyset \neq U \subseteq V$, e com $x(V)$ o menor possível. Vamos mostrar que $x(V) = k$. Por (5.22), temos $x(V) \geq k$. Temos que mostrar então que $x(V) \leq k$.

Seja \mathcal{P} a coleção dos subconjuntos não-vazios maximais de V que satisfazem (5.22) com igualdade. Afirmamos que \mathcal{P} é uma subpartição de V . De fato, suponha que $U, W \in \mathcal{P}$ são tais que $U \cap W \neq \emptyset$. Então

$$\begin{aligned} x(U \cup W) &= x(U) + x(W) - x(U \cap W) \\ &\leq (k - d^{\text{in}}(U)) + (k - d^{\text{in}}(W)) - (k - d^{\text{in}}(U \cap W)) \\ &\leq k - d^{\text{in}}(U \cup W), \end{aligned} \quad (5.23)$$

onde utilizamos a submodularidade da função $d^{\text{in}}(S)$, provada no lema 2.6, na última desigualdade. Logo, $U \cup W \in \mathcal{P}$. Mas como U e W são maximais, segue que $U = W$. Assim, \mathcal{P} é uma subpartição de V .

Afirmamos agora que, para todo $v \in V$ com $x_v > 0$, existe um conjunto $U \in \mathcal{P}$ tal que $v \in U$. De fato, suponha que $x_v > 0$ e $v \notin U$ para todo $U \in \mathcal{P}$. Pela construção de x , todo conjunto $\{v\} \subseteq W \subseteq V$ satisfaz (5.22) de forma estrita, de modo que poderíamos diminuir x_v e ainda assim satisfazer (5.22). Mas isso é um absurdo, pois $x(V)$ é o menor possível.

Logo, por (5.20),

$$\begin{aligned} x(V) &= \sum_{U \in \mathcal{P}} x(U) = \sum_{U \in \mathcal{P}} (k - d^{\text{in}}(U)) \\ &= k|\mathcal{P}| - \sum_{U \in \mathcal{P}} d^{\text{in}}(U) \leq k|\mathcal{P}| - k(|\mathcal{P}| - 1) = k. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Concluimos assim que $x(V) = k$. Sejam r_1, \dots, r_k vértices tais que cada vértice v ocorre x_v vezes dentre os r_i . Por (5.22), para todo $\emptyset \neq U \subseteq V$, temos $d^{\text{in}}(U) \geq k - x(U) = x(V) - x(U) = x(V \setminus U)$, isto é, $d^{\text{in}}(U)$ é maior ou igual ao número de índices i tais que $r_i \notin U$. Assim, pelo corolário 5.2.1, existem arborescências disjuntas B_1, \dots, B_k em D , sendo que B_i é uma r_i -arborescência para cada i . \square

5.4 Arborescências disjuntas de comprimento mínimo

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado, $r \in V$ e $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Considere o sistema

$$\begin{aligned} x_a &\geq 0 && \text{para todo } a \in A, \\ x(\delta^{\text{in}}(U)) &\geq k && \text{para todo } r\text{-corte } \delta^{\text{in}}(U). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Teorema 5.3

O sistema (5.25) é box-TDI.

Demonstração: Diretamente do teorema 4.3, já que, se o sistema $Ax \leq b$ é box-TDI, então o sistema $Ax \leq kb$ é box-TDI, para todo $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. \square

Corolário 5.3.1

O sistema (5.26) é TDI e determina o fecho convexo dos vetores característicos dos subconjuntos de A que contêm k r -arborescências disjuntas.

$$\begin{aligned} 0 \leq x_a &\leq 1 && \text{para todo } a \in A, \\ x(\delta^{\text{in}}(U)) &\geq k && \text{para todo } r\text{-corte } \delta^{\text{in}}(U). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Demonstração: Imediato do teorema 5.3 e do teorema das arborescências disjuntas. \square

O problema da separação relativo ao poliedro (5.26) pode ser resolvido em tempo polinomial, de forma análoga à forma como foi resolvido o problema da separação para o poliedro $P_{r\text{-arbs}}(D)$ na seção 4.3. Segue da equivalência entre separação e otimização, provada por Grötschel, Lovász e Schrijver [GLS88], que podemos encontrar em tempo polinomial k r -arborescências disjuntas com comprimento mínimo.

Capítulo 6

Junções mínimas

Neste capítulo apresentamos o famoso teorema min-max de Lucchesi-Younger, que relaciona junções e cortes orientados. Este é um dos problemas mais bem resolvidos de otimização combinatória em grafos orientados.

O capítulo organiza-se da seguinte maneira. Na seção 6.1, introduzimos alguns conceitos básicos, como a definição de corte orientado e de junção. Alguns resultados básicos mostrarão a motivação para o estudo de tais estruturas e também servirão para deixar o leitor melhor familiarizado com elas. Na seção 6.2, provamos o poderoso teorema de Lucchesi-Younger, abordando-o inclusive de forma poliédrica e resolvendo o respectivo problema de separação. Finalmente, na seção 6.3, vemos uma consequência imediata do teorema central do capítulo: uma relação min-max envolvendo circuitos e quebra-circuitos em grafos planares.

6.1 Conceitos básicos

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado. Um subconjunto $C \subseteq A$ é chamado de *corte orientado* se existe um conjunto $\emptyset \neq U \subsetneq V$ tal que $C = \delta^{\text{in}}(U)$ e $\delta^{\text{out}}(U) = \emptyset$. Uma *junção* é um conjunto de arcos que intersecta cada corte orientado de D .

É fácil ver que

D tem um corte orientado se, e somente se, D não é (6.1)
fortemente conexo.

De fato, se $\delta^{\text{in}}(U)$ é um corte orientado em D , então é óbvio que não existe (s, t) -caminho em D com $s \in U$ e $t \notin U$. Já se D não é fortemente conexo, sejam s e t vértices tais que não existe (s, t) -caminho em D . Tome como U o conjunto dos vértices acessíveis a partir de s . Claramente, $\delta^{\text{in}}(U)$ é um corte orientado. Provamos assim (6.1).

Com isso, podemos mostrar o seguinte resultado:

Proposição 6.1

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado e $B \subseteq A$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) B é uma junção;
- (ii) o grafo $(V, A \cup B^{-1})$ é fortemente conexo;
- (iii) o grafo obtido a partir de D através da contração dos arcos de B é fortemente conexo.

Demonstração: Mostraremos apenas que as afirmações (i) e (ii) são equivalentes, pois a equivalência entre (ii) e (iii) é imediata.

Seja $B \subseteq A$ e $D' := (V, A')$ um grafo orientado, com $A' := A \cup B^{-1}$. É óbvio que $\delta_A^{\text{in}}(U) \subseteq \delta_{A'}^{\text{in}}(U)$ para todo $\emptyset \neq U \subsetneq V$. Assim, se $\delta_A^{\text{in}}(U)$ não é orientado em D , então $\delta_{A'}^{\text{in}}(U)$ também não é orientado em D' . Se $\delta_A^{\text{in}}(U)$ é orientado em D , então $\delta_{A'}^{\text{in}}(U)$ não é orientado em D' se, e somente se, $\delta_{A'}^{\text{out}}(U) \neq \emptyset$, que ocorre se, e somente se, $B \cap \delta_A^{\text{in}}(U) \neq \emptyset$. Assim, D' não tem cortes orientados se, e somente se, B é uma junção de D . Agora a equivalência entre (i) e (ii) segue imediatamente de (6.1). \square

Com algumas hipóteses adicionais, Frank fortaleceu a proposição acima:

Teorema 6.2

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado fracamente conexo sem arcos de corte. Seja $B \subseteq A$. Então B é uma junção minimal se, e somente se, B é um conjunto minimal tal que, se invertermos a orientação de todos os arcos de B , o grafo orientado se torna fortemente conexo.

Demonstração: Seja $A' := (A \setminus B) \cup B^{-1}$ e $D' := (V, A')$.

É fácil ver que,

$$\text{se } D' \text{ é fortemente conexo, então } B \text{ é uma junção.} \quad (6.2)$$

De fato, suponha o contrário, e vamos ver que isso é impossível. Seja $\delta_A^{\text{in}}(U)$ um corte orientado em D tal que $B \cap \delta_A^{\text{in}}(U) = \emptyset$. Então $\delta_{A'}^{\text{in}}(U) = \delta_A^{\text{in}}(U)$ e $\delta_{A'}^{\text{out}}(U) = \delta_A^{\text{out}}(U) = \emptyset$, de modo que $\delta_{A'}^{\text{in}}(U)$ é um corte orientado em D' , o que é um absurdo, pela suposição de que D' é fortemente conexo e por (6.1).

Se B é minimal tal que o grafo $(V, (A \setminus B) \cup B^{-1})$ é fortemente conexo, então por (6.1) o grafo $(V, (A \setminus \tilde{B}) \cup \tilde{B}^{-1})$ tem um corte orientado C para qualquer $\tilde{B} \subsetneq B$. É fácil ver que C também é um corte orientado em D , de modo que \tilde{B} não é uma junção de D . Logo, B é uma junção minimal de D .

Agora vamos mostrar que, se B é uma junção minimal de D , então D' é fortemente conexo. Isso é suficiente para provarmos o teorema. De fato, suponha que o grafo orientado $(V, (A \setminus \tilde{B}) \cup \tilde{B}^{-1})$ é fortemente conexo para algum $\tilde{B} \subsetneq B$. Nesse caso, teríamos por (6.2) que \tilde{B} é uma junção de D ,

contradizendo a minimalidade de B . Assim, teremos mostrado que B é minimal tal que $(V, (A \setminus B) \cup B^{-1})$ é fortemente conexo.

Suponha por contradição que D' não é fortemente conexo. Seja K o conjunto de vértices de um componente forte de D' tal que $\delta_{A'}^{\text{in}}(K) = \emptyset$. É fácil ver que $\delta_A^{\text{in}}(K) \neq \emptyset$, pois caso contrário teríamos $\delta_{A'}^{\text{in}}(K) \neq \emptyset$, já que B é uma junção. Seja $\delta_A^{\text{in}}(K) = \{a_1, \dots, a_t\}$. Note então que $a_1, \dots, a_t \in B$. Como B é uma junção minimal, então para cada $i = 1, \dots, t$, existe um subconjunto U_i de V tal que $\delta_A^{\text{in}}(U_i) = \emptyset$ e $\delta_B^{\text{out}}(U_i) = \{a_i\}$.

Vamos mostrar que $K \cap U_i = \emptyset$ para todo i . Suponha que $K \cap U_i \neq \emptyset$. Como $a_i \in \delta_A^{\text{in}}(K)$ e $a_i \in \delta_A^{\text{out}}(U_i)$, então a ponta inicial do arco a_i está em $U_i \setminus K$ e a ponta final, em $K \setminus U_i$. Em particular, $K \setminus U_i \neq \emptyset$. Como $D'[K]$ é fortemente conexo, então existe um arco a de A' , com as duas pontas em K , que entra em U_i . Como $\delta_A^{\text{in}}(U_i) = \emptyset$, então $a \in B^{-1}$. Assim, $a^{-1} \in \delta_B^{\text{out}}(U_i)$. Como a ponta inicial de a^{-1} está em $K \cap U_i$ e a de a_i está em $U_i \setminus K$, temos $a_i \neq a^{-1}$. Mas então $\delta_B^{\text{out}}(U_i) \supseteq \{a_i, a^{-1}\}$, o que contradiz $\delta_B^{\text{out}}(U_i) = \{a_i\}$.

Temos também que $U_i \cap U_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$. De fato, suponha que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Pela submodularidade da função $d_A^{\text{in}}(S)$, provada no lema 2.6, temos

$$d_A^{\text{in}}(U_i \cup U_j) + d_A^{\text{in}}(U_i \cap U_j) \leq d_A^{\text{in}}(U_i) + d_A^{\text{in}}(U_j) = 0, \quad (6.3)$$

de modo que $\delta_A^{\text{in}}(U_i \cap U_j) = \emptyset$. Assim, $\delta_A^{\text{out}}(U_i \cap U_j)$ é um corte orientado de D . Como D é fracamente conexo, devemos ter $\delta_A^{\text{out}}(U_i \cap U_j) \neq \emptyset$, e portanto $\delta_B^{\text{out}}(U_i \cap U_j) \neq \emptyset$. Porém, pela submodularidade da função $d_B^{\text{out}}(S)$, provada no lema 2.6, temos

$$d_B^{\text{out}}(U_i \cap U_j) \leq d_B^{\text{out}}(U_i) + d_B^{\text{out}}(U_j) - d_B^{\text{out}}(U_i \cup U_j) = 0, \quad (6.4)$$

onde utilizamos o fato de que as pontas finais dos arcos a_i e a_j estão em K , e portanto fora de $U_i \cup U_j$. Temos portanto $\delta_B^{\text{out}}(U_i \cap U_j) = \emptyset$, um absurdo.

Assim, U_1, \dots, U_t são subconjuntos disjuntos de $V \setminus K$. Como D não tem arcos de corte, temos $\delta_A^{\text{out}}(U_i) \geq 2$ para todo i , já que $\delta_A^{\text{in}}(U_i) = \emptyset$. Para cada i , apenas um arco sai de U_i para entrar em K , a saber, o arco a_i . Logo, o conjunto $W := V \setminus (K \cup U_1 \cup \dots \cup U_t)$ é não-vazio. Note que $\delta_A^{\text{out}}(W) = \emptyset$, pois um arco em tal conjunto deveria entrar em U_i ou em K , o que é impossível, já que $\delta_A^{\text{in}}(U_i) = \emptyset$ para todo i e todo arco que entra em K sai de algum U_i .

Como D é fracamente conexo, então $\delta_A^{\text{in}}(W) \neq \emptyset$, e portanto $\delta_B^{\text{in}}(W) \neq \emptyset$, ou seja,

$$\delta_B^{\text{out}}(K \cup U_1 \cup \dots \cup U_t) \neq \emptyset \quad (6.5)$$

Porém, como $\delta_{A'}^{\text{in}}(K) = \emptyset$, então $\delta_B^{\text{out}}(K) = \emptyset$. Ademais, $\delta_B^{\text{out}}(U_i) = \{a_i\}$ para todo i . Assim, como a_i tem ponta final em K , temos $\delta_B^{\text{out}}(K \cup U_i) = \emptyset$ para todo i , e conseqüentemente $\delta_B^{\text{out}}(K \cup U_1 \cup \dots \cup U_t) = \emptyset$, contradizendo com (6.5). \square

6.2 O teorema de Lucchesi-Younger

A relação min-max que estudaremos a seguir foi conjecturada independentemente por Robertson e Younger [You63, You65, You69] e provada por Lucchesi e Younger [LY78]:

Teorema 6.3 (Teorema de Lucchesi-Younger)

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado fracamente conexo. Então o tamanho mínimo de uma junção é igual ao número máximo de cortes orientados disjuntos.

Demonstração (Lovász [Lov76]): Dado um grafo orientado D , denote por $\nu(D)$ o número máximo de cortes orientados disjuntos em D , e por $\tau(D)$ o tamanho mínimo de uma junção de D . É óbvio que $\nu(D) \leq \tau(D)$.

Fixe como $D = (V, A)$ um contra-exemplo com o menor número de arcos possível. Temos necessariamente $\nu(D) \geq 1$, pois caso contrário a afirmação é trivialmente verdadeira.

Seja $B \subseteq A$. Denote por D_B o grafo orientado obtido a partir de D através da substituição de cada arco $a = (u, w)$ em B por um (u, w) -caminho de comprimento 2, sendo que o vértice intermediário, digamos v_a , é novo.

Escolha um conjunto B maximal tal que $\nu(D_B) = \nu(D)$. Observe que $B \neq A$. De fato, seja $\delta_A^{\text{out}}(U)$ um corte orientado em D . Se tomarmos $U' := \{v_a : a \in \delta_A^{\text{out}}(U)\}$, é claro que $\delta_{D_A}^{\text{out}}(U \cup U')$ é um corte orientado em D_A , disjunto de $\delta_{D_A}^{\text{out}}(U)$. Assim, é fácil ver que $\nu(D_A) \geq 2\nu(D) > \nu(D)$.

Seja $b \in A \setminus B$. Defina $D' := D_{B \cup \{b\}}$ e $V' := V(D')$. Pela maximalidade de B , temos $\nu(D') > \nu(D)$.

Seja D'' o grafo orientado obtido a partir de D através da contração do arco b , com $V'' := V(D'')$. Como D é um contra-exemplo com um número mínimo de arcos, temos $\nu(D'') = \tau(D'')$. Ademais, é fácil ver que, se J'' é uma junção de D'' , então $J := J'' \cup \{b\}$ é uma junção de D , de modo que $\tau(D) \leq \tau(D'') + 1$. Assim,

$$\nu(D'') = \tau(D'') \geq \tau(D) - 1 \geq \nu(D). \quad (6.6)$$

Como todo corte orientado em D'' é também um corte orientado em D , temos $\nu(D'') \leq \nu(D)$, de modo que $\nu(D'') = \nu(D)$.

Seja \mathcal{F}' uma família de subconjuntos de V' tal que $\emptyset \neq U \subsetneq V'$ para todo $U \in \mathcal{F}'$, e tal que $\{\delta_{D'}^{\text{in}}(U) : U \in \mathcal{F}'\}$ é uma família máxima de cortes orientados disjuntos de D' . Defina \mathcal{F}'' de forma análoga para o grafo D'' .

Combinando \mathcal{F}' e \mathcal{F}'' , podemos obter uma família \mathcal{F} de subconjuntos próprios e não-vazios de $V_B := V(D_B)$ tal que

$$|\mathcal{F}| = 2\nu(D) + 1 \text{ e os conjuntos } \delta_{D_B}^{\text{in}}(U), \text{ com } U \in \mathcal{F}, \quad (6.7)$$

são cortes orientados em D_B , tal que cada arco de D_B aparece em no máximo dois desses cortes.

Para tanto, proceda da seguinte forma. Para todo $U \in \mathcal{F}'$ contendo o vértice $v_b \in V' \setminus V_B$, removemos v_b de U . Para todo $U \in \mathcal{F}''$ contendo o vértice obtido da contração do arco b , substituímos tal vértice em U pelas duas pontas de b .

De agora em diante, vamos abreviar

$$\begin{aligned}\delta^{\text{in}}(X) &:= \delta_{D_B}^{\text{in}}(X), \\ d^{\text{in}}(X) &:= d_{D_B}^{\text{in}}(X), \\ \delta^{\text{out}}(X) &:= \delta_{D_B}^{\text{out}}(X), \\ d^{\text{out}}(X) &:= d_{D_B}^{\text{out}}(X),\end{aligned}$$

para todo $\emptyset \neq X \subsetneq V_B$.

Agora podemos provar (6.7). Se $a \neq b$ é um arco de D_B , é claro que a aparece em no máximo um corte orientado dentre os cortes $\delta^{\text{in}}(U)$, com $U \in \mathcal{F}'$, e em no máximo um corte orientado dentre os cortes $\delta^{\text{in}}(U)$, com $U \in \mathcal{F}''$. Com relação ao arco b , note que b não pode aparecer em nenhum corte orientado $\delta^{\text{in}}(U)$, com $U \in \mathcal{F}''$, e pode aparecer em no máximo dois dentre os cortes orientados $\delta^{\text{in}}(U)$, com $U \in \mathcal{F}'$. Assim, provamos (6.7).

Dentre todas as famílias \mathcal{F} satisfazendo (6.7), escolha uma que minimiza

$$\sum_{U \in \mathcal{F}} |U| \cdot |V_B \setminus U|. \quad (6.8)$$

Afirmamos que

$$\mathcal{F} \text{ é uma família livre de cruzamentos.} \quad (6.9)$$

De fato, suponha que existem $X, Y \in \mathcal{F}$ tais que $X \not\subseteq Y$, $X \not\supseteq Y$, $X \cap Y \neq \emptyset$ e $X \cup Y \neq V_B$. Vamos mostrar que podemos substituir X e Y por $X \cup Y$ e $X \cap Y$ em \mathcal{F} , sem violar (6.7).

Pela submodularidade da função $d^{\text{out}}(S)$, provada no lema 2.6, temos

$$d^{\text{out}}(X \cup Y) + d^{\text{out}}(X \cap Y) \leq d^{\text{out}}(X) + d^{\text{out}}(Y) = 0, \quad (6.10)$$

de modo que $\delta^{\text{in}}(X \cup Y)$ e $\delta^{\text{in}}(X \cap Y)$ também são cortes orientados em D_B . Temos $\delta^{\text{in}}(X \cup Y) \cup \delta^{\text{in}}(X \cap Y) \subseteq \delta^{\text{in}}(X) \cup \delta^{\text{in}}(Y)$. Assim, se um arco a não está em $\delta^{\text{in}}(X)$ nem em $\delta^{\text{in}}(Y)$, então a também não está em $\delta^{\text{in}}(X \cup Y)$ nem em $\delta^{\text{in}}(X \cap Y)$. Se um arco a está em ambos $\delta^{\text{in}}(X)$ e $\delta^{\text{in}}(Y)$, então a não está em nenhum $\delta^{\text{in}}(U)$, com $U \in \mathcal{F} \setminus \{X, Y\}$, e estamos feitos. Suponha então que a está em $\delta^{\text{in}}(X) \setminus \delta^{\text{in}}(Y)$. Então a ponta inicial de a está em $V_B \setminus (X \cup Y)$ ou em $Y \setminus X$. No primeiro caso, temos $a \in \delta^{\text{in}}(X \cup Y) \setminus \delta^{\text{in}}(X \cap Y)$ e, no segundo, $a \in \delta^{\text{in}}(X \cap Y) \setminus \delta^{\text{in}}(X \cup Y)$.

Assim, cada arco a aparece em no máximo dois dentre os cortes orientados $\delta^{\text{in}}(U)$, com $U \in \mathcal{F}$, após a modificação prescrita.

Provamos então que, após a substituição em \mathcal{F} de X e Y por $X \cup Y$ e $X \cap Y$, a família \mathcal{F} continua satisfazendo (6.7). Porém, pelo teorema 2.1, a soma (6.8) diminuiu, contradizendo a escolha de \mathcal{F} . Segue que \mathcal{F} é livre de cruzamentos.

Para cada $X \in \mathcal{F}$, defina

$$\beta(X) := \{U \in \mathcal{F} : U \subseteq X \text{ ou } U \cap X = \emptyset\}. \quad (6.11)$$

Seja \mathcal{F}_2 a coleção de conjuntos que ocorre duas vezes em \mathcal{F} e \mathcal{F}_1 a coleção de conjuntos que ocorre exatamente uma vez em \mathcal{F} . Afirmamos que

$$\begin{aligned} \text{se } X, Y \in \mathcal{F}_1, \text{ são tais que } |\beta(X)| \equiv |\beta(Y)| \pmod{2} \text{ e} \quad (6.12) \\ X \neq Y, \text{ então nenhum arco de } D_B \text{ entra em ambos os} \\ \text{conjuntos } X \text{ e } Y, \text{ isto é, } \delta^{\text{in}}(X) \cap \delta^{\text{in}}(Y) = \emptyset. \end{aligned}$$

De fato, suponha que algum arco a de D_B entra em ambos X e Y e vamos ver que isso é impossível. Como \mathcal{F} é livre de cruzamentos, podemos supor que $X \subset Y$.

Primeiro suponha que $|\beta(Y)| \leq |\beta(X)|$. Como $Y \in \beta(Y) \setminus \beta(X)$, então existe um conjunto Z em $\beta(X) \setminus \beta(Y)$, de modo que $Z \not\subseteq Y$ e $Z \cap Y \neq \emptyset$. Mas então $Z \not\subseteq X$, e portanto $Z \cap X = \emptyset$. Logo, $Y \not\subseteq Z$. Como \mathcal{F} é livre de cruzamentos, temos necessariamente $Z \cup Y = V_B$. Segue então que o arco a sai de Z , isto é, $a \in \delta^{\text{out}}(Z)$. Mas isso é um absurdo, pois todos os cortes $\delta^{\text{in}}(U)$, com $U \in \mathcal{F}$, são orientados, ou seja, $\delta^{\text{out}}(U) = \emptyset$ e, em particular, $\delta^{\text{out}}(Z) = \emptyset$.

Suponha então que $|\beta(Y)| \geq |\beta(X)| + 2$, de modo que existe um conjunto $Z \neq Y$ tal que $Z \in \beta(Y) \setminus \beta(X)$. Assim, $Z \not\subseteq X$ e $Z \cap X \neq \emptyset$. Logo, $Z \cap Y \neq \emptyset$, e portanto $Z \subseteq Y$. Como $Z \cup X \neq V_B$ e \mathcal{F} é livre de cruzamentos, segue que $X \subset Z$. Mas então o arco a entra em X, Y e Z , contradizendo (6.7).

Provamos assim (6.12). Para $j = 0, 1$, denote

$$\mathcal{F}_1^j := \left\{ X \in \mathcal{F}_1 : |\beta(X)| \equiv j \pmod{2} \right\}. \quad (6.13)$$

Segue de (6.12) que os cortes orientados da coleção $\{\delta^{\text{in}}(X) : X \in \mathcal{F}_1^j\}$ são disjuntos.

Observe agora que $|\mathcal{F}| = 2|\mathcal{F}_2| + |\mathcal{F}_1|$. Se tivéssemos $|\mathcal{F}_2| + |\mathcal{F}_1^0| \leq \nu(D)$ e $|\mathcal{F}_2| + |\mathcal{F}_1^1| \leq \nu(D)$, então teríamos $|\mathcal{F}| \leq 2\nu(D)$, o que é um absurdo, pois $|\mathcal{F}| = 2\nu(D) + 1$. Assim, para algum $j \in \{0, 1\}$, a coleção $\mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_1^j$ tem tamanho pelo menos $\nu(D) + 1$. Mas então

$$\left\{ \delta^{\text{in}}(X) : X \in \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_1^j \right\} \quad (6.14)$$

é uma família de $\nu(D) + 1$ cortes orientados disjuntos em D_B , o que é um absurdo, pois $\nu(D_B) = \nu(D)$. \square

6.2.1 Abordagem poliédrica

A seguinte versão capacitada do teorema de Lucchesi-Younger segue facilmente:

Corolário 6.3.1 (Teorema capacitado de Lucchesi-Younger)

Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado fracamente conexo e $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^A$ uma função comprimento. Então o comprimento mínimo de uma junção é igual ao tamanho máximo de uma família de cortes orientados tal que cada arco a está presente em no máximo $\ell(a)$ dos cortes orientados.

Demonstração: Imediato do teorema de Lucchesi-Younger, substituindo cada arco $a = (u, v)$ por um (u, v) -caminho de comprimento $\ell(a)$, onde os vértices internos do caminho são novos (isso significa que arcos de comprimento nulo são contraídos). \square

Agora é fácil obtermos uma caracterização poliédrica. Defina o *politopo das junções de D* como

$$P_{\text{junções}}(D) := \text{fecho. conv} \{ \chi^J : J \text{ é uma junção de } D \}. \quad (6.15)$$

Corolário 6.3.2

O sistema (6.16) é TDI e determina o politopo $P_{\text{junções}}(D)$.

$$\begin{aligned} 0 \leq x_a \leq 1 & \quad \text{para todo } a \in A, \\ x(C) \geq 1 & \quad \text{para todo corte orientado } C. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Demonstração: A total dual integralidade do sistema (6.16) é imediata do teorema capacitado de Lucchesi-Younger. O fato de que o sistema (6.16) determina o politopo $P_{\text{junções}}(D)$ agora é trivial, já que todo vetor integral que satisfaz (6.16) é obviamente vetor característico de alguma junção de D . \square

Vamos mostrar agora que o problema da separação relativo ao politopo $P_{\text{junções}}(D)$ pode ser resolvido em tempo polinomial. É trivial verificarmos se $0 \leq x_a \leq 1$ para todo arco a .

Suponha que temos um algoritmo que, dados um grafo D e uma função capacidade $c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^A$, encontra a capacidade mínima de um corte orientado. Então basta utilizar o vetor x como vetor de capacidades e verificar se o corte orientado de capacidade mínima tem capacidade maior ou igual a 1. Se esse for o caso, então é claro que x satisfaz o sistema (6.16). Caso contrário, o corte orientado de capacidade mínima fornecerá uma restrição de (6.16) violada por x .

Resta mostrarmos então um algoritmo que encontra um corte orientado de capacidade mínima.

Construa a partir de D um grafo orientado D' da seguinte forma. Inicialmente, tomamos $D' = D$. Para cada arco a de D , adicionamos a D' um

arco a^{-1} , com capacidade infinita. Podemos tomar como infinito uma capacidade suficientemente grande, digamos $\infty := c(A(D)) + 1$, já que todo corte de D tem capacidade estritamente menor que tal valor. Chame de c' a nova função capacidade. Note que temos $c'(a) = c(a)$ se $a \in A(D)$ e $c'(a) = \infty$ caso contrário.

Fixe vértices s e t . Seja $\delta_{D'}^{\text{out}}(S)$ um (s, t) -corte em D' . É fácil ver então que $c(\delta_{D'}^{\text{out}}(S)) < \infty$ se, e somente se, $\delta_D^{\text{out}}(S)$ é um corte orientado em D . De fato, se $\delta_D^{\text{out}}(S) = \emptyset$, nada temos a demonstrar. Suponha então que $\delta_D^{\text{out}}(S) \neq \emptyset$. Se $\delta_D^{\text{out}}(S)$ é um corte orientado em D , então todos os arcos de $\delta_{D'}^{\text{out}}(S)$ têm capacidade finita. Já se $\delta_D^{\text{out}}(S)$ não é corte orientado em D , então $\delta_D^{\text{in}}(S) \neq \emptyset$, de modo que existe algum arco em $\delta_{D'}^{\text{out}}(S)$ com capacidade infinita, ou seja, $c'(\delta_{D'}^{\text{out}}(S)) = \infty$, como queríamos.

Suponha então que $\delta_{D'}^{\text{out}}(S)$ é um (s, t) -corte de capacidade mínima em D' . Se $c'(\delta_{D'}^{\text{out}}(S)) = \infty$, então certamente não há (s, t) -cortes em D que sejam cortes orientados. Já se $c'(\delta_{D'}^{\text{out}}(S)) < \infty$, então $\delta_D^{\text{out}}(S)$ é um corte orientado em D , e tem capacidade mínima dentre todos os cortes orientados de D que também são (s, t) -cortes.

Agora basta utilizar a redução acima para todos os pares possíveis de vértices, em conjunto com algum algoritmo que encontra (s, t) -cortes de capacidade mínima, como por exemplo o algoritmo fortemente polinomial de Edmonds-Karp, para encontrar um corte orientado de capacidade mínima em D .

Concluimos assim, pela equivalência entre separação e otimização provada por Grötschel, Lovász e Schrijver [GLS88], e pelos resultados de Frank e Tardos [FT87], que existe um algoritmo fortemente polinomial para encontrar uma junção de comprimento mínimo.

6.3 Quebra-circuitos em grafos planares

O teorema de Lucchesi-Younger fornece facilmente uma relação min-max envolvendo circuitos e quebra-circuitos em grafos planares, através da dualidade no plano.

Corolário 6.3.3

Seja D um grafo orientado planar. Então o tamanho mínimo de um quebra-circuitos é igual ao número máximo de circuitos disjuntos nos arcos.

Demonstração: Considere o grafo dual D^* de D . É fácil ver que um conjunto de arcos de D é um circuito se, e somente se, o conjunto equivalente em D^* é um corte orientado em D^* . Agora o resultado segue imediatamente do teorema de Lucchesi-Younger. \square

Younger [You65] mostrou que a hipótese de planaridade não pode ser removida do corolário 6.3. De fato, considere o grafo orientado D da figura 6.1. Vamos mostrar que

$$\text{o tamanho mínimo de um quebra-circuitos de } D \text{ é } 2. \quad (6.17)$$

Suponha, por contradição, que existe um quebra-circuitos F de tamanho 1. Como os circuitos $x_2y_2x_1y_1$ e $x_2y_2x_3y_3$ se intersectam apenas no arco x_2y_2 , temos certamente $x_2y_2 \in F$, de modo que $F = \{x_2y_2\}$. Mas então $x_1y_1x_3y_3$ é um circuito em $D - F$, um absurdo. É fácil ver que $\{x_1y_1, x_3y_3\}$ é um quebra-circuitos de D . Provamos assim (6.17).

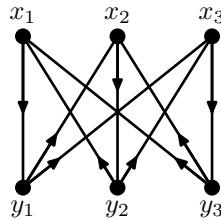


Figura 6.1: O tamanho mínimo de um quebra-circuitos é 2, mas não há 2 circuitos disjuntos nos arcos.

Vamos mostrar agora que D não tem 2 circuitos disjuntos nos arcos. Sejam C_1 e C_2 circuitos em D . Como o grafo subjacente a D é bipartido e não tem circuitos de comprimento 2, então todo circuito de D passa por exatamente dois vértices dentre $\{x_1, x_2, x_3\}$. Seja então $x_i \in V(C_1) \cap V(C_2)$. Como $d^{\text{out}}(x_i) = 1$, então é claro que $x_iy_i \in A(C_1) \cap A(C_2)$, de modo que não existem 2 circuitos disjuntos nos arcos em D , como queríamos.

Referências bibliográficas

- [Boc71] F. BOCK, *An algorithm to construct a minimum directed spanning tree in a directed network*, in Developments in Operations Research, Vol. 1 (Proceedings of the Third Annual Israel Conference on Operations Research, Tel Aviv), B. Avi-Itzhak, editor, 1971, Gordon and Breach, p. 29–44. [p. 46]
- [Dan51] G. B. DANTZIG, *Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities*, in Activity Analysis of Production and Allocation, Cowles Commission Monograph No. 13, John Wiley & Sons Inc., 1951, p. 339–347. [p. 18]
- [dC88] D. DE CAEN, *On a theorem of König on bipartite graphs*, Journal of Combinatorics, Information & System Sciences, 13 (1988), p. 127. [p. 25]
- [DF55] G. B. DANTZIG E D. R. FULKERSON, *On the max flow min cut theorem of networks*. Paper P-826 [= Research Memorandum RM-1418-1], The RAND Corporation, Santa Monica, California, [24 August] 1955. [p. 2, 31, 36]
- [DF56] ———, *On the max-flow min-cut theorem of networks*, in Linear inequalities and related systems, Annals of Mathematics Studies, no. 38, Princeton University Press, 1956, p. 215–221. [p. 2, 31, 36]
- [Die00] R. DIESTEL, *Graph theory*, vol. 173 de Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, second ed., 2000. [p. 4]
- [Din70] E. A. DINITS, *Algoritm resheniya zadachi o maksimal'nom potoke v seti so stepennoï otsenkoï*, Doklady Akademii Nauk SSSR, 194 (1970), p. 754–757. [p. 38]
- [Edm65a] J. EDMONDS, *Maximum matching and a polyhedron with 0, 1-vertices*, Journal of Research of the National Bureau of Standards, Section B, 69B (1965), p. 125–130. [p. 2]

- [Edm65b] ———, *Minimum partition of a matroid into independent subsets*, Journal of Research of the National Bureau of Standards, Section B, 69B (1965), p. 67–72. [p. 2]
- [Edm65c] ———, *Paths, trees, and flowers*, Canadian Journal of Mathematics. Journal Canadien de Mathématiques, 17 (1965), p. 449–467. [p. 2]
- [Edm67] ———, *Optimum branchings*, Journal of Research of the National Bureau of Standards, Section B, 71B (1967), p. 233–240. [p. 2, 46, 55]
- [Edm70] ———, *Submodular functions, matroids, and certain polyhedra*, in Combinatorial Structures and their Applications (Proceedings Calgary International Conference on Combinatorial Structures and Their Applications, Calgary, Alberta, 1969), Gordon and Breach, 1970, p. 69–87. [p. 60]
- [Edm73] ———, *Edge-disjoint branchings*, in Combinatorial algorithms (Courant Computer Science Symposium 9, Monterey, California, 1972), Algorithmics Press, New York, 1973, p. 91–96. [p. 2, 58]
- [EF70] J. EDMONDS E D. R. FULKERSON, *Bottleneck extrema*, Journal of Combinatorial Theory, 8 (1970), p. 299–306. [p. 6]
- [EG77] J. EDMONDS E R. GILES, *A min-max relation for submodular functions on graphs*, in Studies in integer programming (Proceedings Workshop on Integer Programming, Bonn, 1975), vol. 1 de Annals of Discrete Mathematics, North-Holland, 1977, p. 185–204. [p. 2, 21, 50]
- [Ege31] J. EGERVÁRY, *Matrixok kombinatorius tulajdonságairól*, Matematikai és Fizikai Lapok, 38 (1931), p. 16–28. [p. 2]
- [EK72] J. EDMONDS E R. M. KARP, *Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems*, Journal of the Association for Computing Machinery, 19 (1972), p. 248–264. [p. 38]
- [EW49] C. J. EVERETT E G. WHAPLES, *Representations of sequences of sets*, American Journal of Mathematics, 71 (1949), p. 287–293. [p. 28]
- [FF54] L. R. FORD E D. R. FULKERSON, *Maximal flow through a network*. Paper P-605 [= Research Memorandum RM-1400], The RAND Corporation, Santa Monica, California, [19 November] 1954. [p. 2, 36]

- [FF56] ———, *Maximal flow through a network*, Canadian Journal of Mathematics. Journal Canadien de Mathématiques, 8 (1956), p. 399–404. [p. 2, 36]
- [Fra79a] A. FRANK, *Covering branchings*, Acta Universitatis Szegediensis. Acta Scientiarum Mathematicarum, 41 (1979), p. 77–81. [p. 62]
- [Fra79b] ———, *Kernel systems of directed graphs*, Acta Universitatis Szegediensis. Acta Scientiarum Mathematicarum, 41 (1979), p. 63–76. [p. 50]
- [Fra81a] ———, *On disjoint trees and arborescences*, in Algebraic methods in graph theory, Vol. I (Colloquium Szeged, 1978), vol. 25 de Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, North-Holland, 1981, p. 159–169. [p. 62]
- [Fra81b] ———, *A weighted matroid intersection algorithm*, Journal of Algorithms, 2 (1981), p. 328–336. [p. 56]
- [Fro12] F. G. FROBENIUS, *Über matrizen aus nicht negativen elementen*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, (1912), p. 456–477. [p. 27]
- [Fro17] ———, *Über zerlegbare determinanten*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, (1917), p. 274–277. [p. 25, 27, 28]
- [FT87] A. FRANK E É. TARDOS, *An application of simultaneous Diophantine approximation in combinatorial optimization*, Combinatorica. An International Journal of the János Bolyai Mathematical Society, 7 (1987), p. 49–65. [p. 50, 72]
- [Ful74] D. R. FULKERSON, *Packing rooted directed cuts in a weighted directed graph*, Mathematical Programming. A Publication of the Mathematical Programming Society, 6 (1974), p. 1–13. [p. 46, 55]
- [FY87] P. FEOFILOFF E D. H. YOUNGER, *Directed cut transversal packing for source-sink connected graphs*, Combinatorica. An International Journal of the János Bolyai Mathematical Society, 7 (1987), p. 255–263. [p. 2]
- [GLS88] M. GRÖTSCHEL, L. LOVÁSZ, E A. SCHRIJVER, *Geometric algorithms and combinatorial optimization*, vol. 2 de Algorithms and Combinatorics: Study and Research Texts, Springer-Verlag, 1988. [p. 18, 50, 64, 72]
- [Gör00] F. GÖRING, *Short proof of Menger's theorem*, Discrete Mathematics, 219 (2000), p. 295–296. [p. 30, 33]

- [Grü38] T. GRÜNWARD, *Ein neuer Beweis eines Mengerschen Satzes*, Journal of the London Mathematical Society, 13 (1938), p. 188–192. [p. 30]
- [Hač79] L. G. HAČIJAN, *Polinomialnyĭ algoritm v lineĭnom programmirovaniĭ*, Doklady Akademii Nauk SSSR, 244 (1979), p. 1093–1096. [p. 18]
- [Hač80] ———, *Polinomial'nye algoritmy v lineĭnom programmirovaniĭ*, Akademiya Nauk SSSR. Zhurnal Vychislitel' noĭ Matematiki i Matematicheskoi Fiziki, 20 (1980), p. 51–68, 260. [p. 18]
- [Hal35] P. HALL, *On representatives of subsets*, Journal of the London Mathematical Society, 10 (1935), p. 26–30. [p. 28]
- [HK56] A. J. HOFFMAN E J. B. KRUSKAL, *Integral boundary points of convex polyhedra*, in Linear inequalities and related systems, Annals of Mathematics Studies, no. 38, Princeton University Press, 1956, p. 223–246. [p. 2]
- [HK73] J. E. HOPCROFT E R. M. KARP, *An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs*, SIAM Journal on Computing, 2 (1973), p. 225–231. [p. 24]
- [Hof60] A. J. HOFFMAN, *Some recent applications of the theory of linear inequalities to extremal combinatorial analysis*, in Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. X, American Mathematical Society, 1960, p. 113–127. [p. 2]
- [Hof79] ———, *The role of unimodularity in applying linear inequalities to combinatorial theorems*, Annals of Discrete Mathematics, 4 (1979), p. 73–84. Discrete optimization (Proceedings Advanced Research Institute on Discrete Optimization and Systems Applications and Discrete Optimization Symposium, Banff, Alta., 1977), I. [p. 2]
- [JN76] D. B. JUDIN E A. S. NEMIROVSKIĬ, *Informatsionnaya spozhnost' i ěffektivnye metody resheniya vypuklykh ěkstremal'nykh zadach*, Èkonomika i Matematicheskie Metody, 12 (1976), p. 357–369. [p. 18]
- [Kar84] N. KARMARKAR, *A new polynomial-time algorithm for linear programming*, Combinatorica. An International Journal of the János Bolyai Mathematical Society, 4 (1984), p. 373–395. [p. 19]
- [Kón15] D. KÓNIG, *Vonalrendszerek és determinánsok*, Matematikai és Természettudományi Értesítő, 33 (1915), p. 221–229. [p. 27]

- [Kön16] —, *Graphok és alkalmazásuk a determinánsok és a halmazok elméletére*, Matematikai és Természettudományi Értesítő, 34 (1916), p. 104–119. [p. 26, 28]
- [Kön31] —, *Graphok és matrixok*, Matematikai és Fizikai Lapok, 38 (1931), p. 116–119. [p. 1, 23, 24, 28]
- [Kön32] —, *Über trennende knotenpunkte in graphen (nebst anwendungen auf determinanten und matrizen)*, Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, Section Scientiarum Mathematicarum [Szeged], 6 (1932), p. 155–179. [p. 27, 28, 33, 34]
- [Kön36] —, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Akademische Verlagsgesellschaft, 1936. [p. 33]
- [KP80] R. M. KARP E C. H. PAPADIMITRIOU, *On linear characterizations of combinatorial optimization problems*, in 21st Annual Symposium on Foundations of Computer Science (Syracuse, New York, 1980), IEEE, 1980, p. 1–9. [p. 18]
- [KP82] —, *On linear characterizations of combinatorial optimization problems*, SIAM Journal on Computing, 11 (1982), p. 620–632. [p. 18]
- [Kuh55] H. W. KUHN, *The Hungarian method for the assignment problem*, Naval Research Logistics Quarterly, 2 (1955), p. 83–97. [p. 2]
- [Law66] E. L. LAWLER, *Covering problems: Duality relations and a new method of solution*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 14 (1966), p. 1115–1132. [p. 6]
- [Lov76] L. LOVÁSZ, *On two minimax theorems in graph*, Journal of Combinatorial Theory. Series B, 21 (1976), p. 96–103. [p. 3, 58, 68]
- [Lov80] —, *Selecting independent lines from a family of lines in a space*, Acta Universitatis Szegediensis. Acta Scientiarum Mathematicarum, 42 (1980), p. 121–131. [p. 2]
- [LY78] C. L. LUCCHESI E D. H. YOUNGER, *A minimax theorem for directed graphs*, The Journal of the London Mathematical Society. Second Series, 17 (1978), p. 369–374. [p. 2, 68]
- [Mac86] N. MACULAN, *A new linear programming formulation for the shortest s-directed spanning tree problem*, Journal of Combinatorics, Information & System Sciences, 11 (1986), p. 53–56. [p. 52]

- [Mad89] W. MADER, *On disjoint paths in graphs*, in Graph theory in memory of G. A. Dirac (Sandbjerg, 1985), vol. 41 de Annals of Discrete Mathematics, North-Holland, 1989, p. 333–340. [p. 2]
- [Mar92] K. MARCUS, *Poliedros e Clutters bloqueadores e anti-bloqueadores*, dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, 1992. [p. 19]
- [Men27] K. MENGER, *Zur allgemeinen Kurventheorie*, Fundamenta Mathematicae, 10 (1927), p. 96–115. [p. 1, 30, 33]
- [Men32] ———, *Kurventheorie*, Teubner, 1932. [p. 34]
- [Men81] ———, *On the origin of the n -arc theorem*, Journal of Graph Theory, 5 (1981), p. 341–350. [p. 33]
- [Mun57] J. MUNKRES, *Algorithms for the assignment and transportation problems*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 5 (1957), p. 32–38. [p. 2]
- [NWT77] C. S. J. A. NASH-WILLIAMS E W. T. TUTTE, *More proofs of Menger's theorem*, Journal of Graph Theory, 1 (1977), p. 13–17. [p. 32]
- [Ore55] O. ORE, *Graphs and matching theorems*, Duke Mathematical Journal, 22 (1955), p. 625–639. [p. 29]
- [PR80] M. W. PADBERG E M. R. RAO, *The russian method an integer programming*. GBA Working paper, 1980. [p. 18]
- [Pri57] R. C. PRIM, *Shortest connection networks and some generalizations*, The Bell System Technical Journal, 36 (1957), p. 1389–1401. [p. 52]
- [Riz98] R. RIZZI, *König's edge coloring theorem without augmenting paths*, Journal of Graph Theory, 29 (1998), p. 87. [p. 27]
- [Riz00] ———, *A short proof of König's matching theorem*, Journal of Graph Theory, 33 (2000), p. 138–139. [p. 24]
- [Sch82] A. SCHRIJVER, *Min-max relations for directed graphs*, in Bonn Workshop on Combinatorial Optimization (Bonn, 1980), vol. 16 de Annals of Discrete Mathematics, North-Holland, 1982, p. 261–280. [p. 2]
- [Sch83] ———, *Min-max results in combinatorial optimization*, in Mathematical programming: the state of the art (Bonn, 1982), Springer, 1983, p. 439–500. [p. 2]

- [Sch86] —, *Theory of linear and integer programming*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics, John Wiley & Sons Ltd., 1986. A Wiley-Interscience Publication. [p. 4]
- [Sch03a] —, *Combinatorial optimization. Polyhedra and efficiency. Vol. A*, vol. 24 de Algorithms and Combinatorics, Springer-Verlag, 2003. Paths, flows, matchings, Chapters 1–38. [p. 4, 24, 27, 33, 37]
- [Sch03b] —, *Combinatorial optimization. Polyhedra and efficiency. Vol. B*, vol. 24 de Algorithms and Combinatorics, Springer-Verlag, 2003. Matroids, trees, stable sets, Chapters 39–69. [p. 4]
- [Sch03c] —, *Combinatorial optimization. Polyhedra and efficiency. Vol. C*, vol. 24 de Algorithms and Combinatorics, Springer-Verlag, 2003. Disjoint paths, hypergraphs, Chapters 70–83. [p. 4]
- [Sey77] P. D. SEYMOUR, *The matroids with the max-flow min-cut property*, Journal of Combinatorial Theory. Series B, 23 (1977), p. 189–222. [p. 2]
- [Šor70a] N. Z. ŠOR, *Ispol'ovanie operatsii rastyazheniya prostranstva v zadachakh minimizatsii vypuklykh funktsiĭ*, Otdelenie Matematiki, Mekhaniki i Kibernetiki Akademii Nauk Ukrainскої SSR. Kibernetika, 1 (1970), p. 6–12. [p. 18]
- [Šor70b] —, *O skorosti skhodimosti metoda obobshchennogo gradientnogo spuska s rastyazheniem prostranstva*, Otdelenie Matematiki, Mekhaniki i Kibernetiki Akademii Nauk Ukrainскої SSR. Kibernetika, 2 (1970), p. 80–85. [p. 18]
- [Šor77] —, *Metod otsecheniya s rastyazheniem prostranstva dlya resheniya zadach vypuklogo programmirovaniya*, Otdelenie Matematiki, Mekhaniki i Kibernetiki Akademii Nauk Ukrainскої SSR. Kibernetika, 1 (1977), p. 94–95. [p. 18]
- [Tut47] W. T. TUTTE, *The factorization of linear graphs*, The Journal of the London Mathematical Society. Second Series, 22 (1947), p. 107–111. [p. 2]
- [Won84] R. T. WONG, *A dual ascent approach for Steiner tree problems on a directed graph*, Mathematical Programming. A Publication of the Mathematical Programming Society, 28 (1984), p. 271–287. [p. 52]
- [You63] D. H. YOUNGER, *Feedback in a directed graph*, tese de doutorado, Columbia University, New York, 1963. [p. 68]

- [You65] —, *Maximum families of disjoint directed cut sets*, Relatório técnico 42, Digital Systems Lab., Princeton University, New Jersey, 1965. [p. 68, 73]
- [You69] —, *Maximum families of disjoint directed cut sets*, in *Recent Progress in Combinatorics* (Proceedings of the Third Waterloo Conference on Combinatorics, Waterloo, Ontario, 1968), Academic Press, 1969, p. 329–333. [p. 68]