INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
MAT-2453 — CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I (ESCOLA POLITÉCNICA)
SEGUNDA LISTA DE EXERCÍCIOS - PROFESSOR: EQUIPE DE PROFESSORES

EXERCÍCIOS

1. Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$ (c) $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$

(d) $f(x) = x^{\mathrm{e}} + \mathrm{e}^x$ (e) $f(x) = \mathrm{e}^{1/x^2} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x^2}}$ (f) $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 1)$

(g) $f(x) = (\ln x)^2 + (1 + 2^{x^3})^x$ (h) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ (i) $f(x) = x^\pi + \pi^x$

(j) $f(x) = 2^{x^2} + 3^{2x}$ (k) $f(x) = \ln(\operatorname{arctg} x)$ (l) $f(x) = \left(1 + \cos^2 x\right)^{\operatorname{sen} x}$

(m) $f(x) = (\mathrm{e}^x + 3x)^{\operatorname{arcsen}(x^2)}$ (n) $f(x) = (3 + \cos x)^{\operatorname{tg}(x^2)}$ (o) $f(x) = \dfrac{\ln(x^3 + 2^{x^3})}{x^2 + \mathrm{e}^{\cos x}}$

(p) $f(x) = (x^2+1)^{\operatorname{sen}(x^5)}$ (q) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ (r) $f(x) = (1 + \operatorname{arctg} x^2)^{1/x^4}$

Observação 0.1. As funções (a) e (b) são chamadas, respectivamente, de cosseno hiperbólico e de seno hiperbólico e são denotadas, respectivamente por cosh e sinh. Verifique que

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1, \quad \cosh'(x) = \sinh(x), \quad \text{e} \quad \sinh'(x) = \cosh(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

2. Suponha que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é contínua e que $0 \leq f(x) \leq 1$, para todo $x \in [0,1]$. Prove que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$.

3. Suponha $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua, $f(0) = 1$ e $f(x)$ um número racional para todo $x \in [0,1]$. Prove que $f(x) = 1$, para todo $x \in [0,1]$.

4. Achar os valores mínimo e máximo de:

(a) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x,\ x \in [0,\pi]$ (b) $f(x) = \sqrt{3 + 2x - x^3}$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$ (d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$, $-1 \leq x \leq 2$

(e) $f(x) = |x^4 - 2x^3|$, $0 \leq x \leq 3$

5. Seja f derivável em $\mathbb{R}$ e seja g dada por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$. Suponha que x_0 é ponto crítico de g. Prove que $x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$. Prove que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0 passa pela origem.

6. Use o TVM para provar as seguintes desigualdades:
(a) $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |b-a|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$.
(b) $b^b - a^a > a^a(b-a)$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$ com $1 \leq a < b$.
(c) $\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a} \leq \frac{b-a}{a^2}$, para $1 \leq a < b \leq \mathrm{e}$.

7. Seja f uma função derivável no intervalo $]-1, +\infty[$ tal que $f(0) = 0$ e $0 < f'(x) \leq 1$, para todo $x > 0$. Mostre que $0 < f(x) \leq x$, para todos $x > 0$.

8. Mostre que $f(x) = (1+x)^{1/x}$ é estritamente decrescente em $]0, +\infty[$. Conclua que

$$(1+\pi)^{\mathrm{e}} < (1+\mathrm{e})^\pi.$$

9. Prove as seguintes desigualdades:

(a) $\dfrac{\operatorname{tg}\ b}{\operatorname{tg}\ a} > \dfrac{b}{a}$ para $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ (b) $\mathrm{e}^\pi > \pi^{\mathrm{e}}$

(c) $2x \operatorname{arctg} x > \ln(1+x^2)$, para $x > 0$ (d) $x - \dfrac{x^3}{3!} < \operatorname{sen} x < x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$, para $x > 0$

10. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) = f(b) = 0$. Determine qual das alternativas abaixo implica a existência de um c entre a e b tal que $f(c) = 0$.

a. $f'(a) > 0$ e $f'(b) < 0$. **b.** $f'(a)f'(b) > 0$. **c.** $f'(a) + f'(b) > 0$. **d.** $f'(a) + f'(b) < 0$.

11. Determine c para que a função $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + c$ tenha uma única raiz real.

12. Para que valores de k a equação $2x^3 - 9x^2 + 12x = k$ tem três soluções reais distintas ?

13. Prove que existe um único $c \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(\frac{c\pi}{2}) = 2 - 3c$.

14. Seja $f(x) = x^7 + \pi x^3 - 8x^2 + ex + 1$. Quantas soluções distintas tem a equação $f''(x) = 0$? Mostre que a equação $f(x) = 0$ tem exatamente três soluções reais distintas.

15. Seja g um função contínua no intervalo $[-1, 2]$ e derivável em $]-1, 2[$, que assume os valores

$$g(-1) = 0 \qquad g(0) = 4 \qquad g(1) = 2 \qquad g(2) = 2.$$

Considere as afirmações:

(I) A equação $g(x) = 3$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[-1, 0]$.

(II) A equação $g(x) = 2$ tem exatamente uma solução no intervalo $[-1, 0]$.

(III) A função g admite um ponto crítico no intervalo $]1, 2[$.

Pode-se dizer com certeza que

a. todas as afirmações são falsas.

b. somente as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

c. somente as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

d. todas as afirmações são verdadeiras.

e. somente a afirmação (I) é verdadeira.

16. Dentre as alternativas abaixo, aquela que contém um polinômio que define uma função bijetora de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é:

a. $3x^5 - 5x^3 + 15x$.

b. $3x^5 - 5x^3 - 15x$.

c. $3x^5 + 5x^3 - 15x$.

d. $3x^5 - 5x^3$.

e. $5x^3 - 15x$.

17. Prove que se p é um polinômio, a equação $e^x - p(x) = 0$ não pode ter infinitas soluções reais.

18. Seja $f(x)$ um polinômio de grau 3, com três raízes reais distintas. Mostre que f tem um ponto de inflexão, que é a média aritmética das três raízes.

19. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e com um único ponto crítico x_0. Prove que se x_0 for ponto de mínimo (máximo) local de f, então x_0 será o único ponto de mínimo (máximo) global de f.

20. Determine todos os números positivos a tais que a curva $y = a^x$ corta a reta $y = x$.

21. (Transferência Fuvest 2012) Considere o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, em que a, b, c são números reais. Qual a alternativa verdadeira?

a. se $c > 0$ então $p(x)$ terá pelo menos uma raiz positiva.

b. $p(x)$ sempre terá pelo menos um ponto crítico.

c. $p(x)$ sempre terá exatamente um ponto de inflexão.

d. se $a^2 < 3b$ então $p(x)$ não será injetora.

e. se $a^2 < 3b$ então $p(x)$ não será sobrejetora.

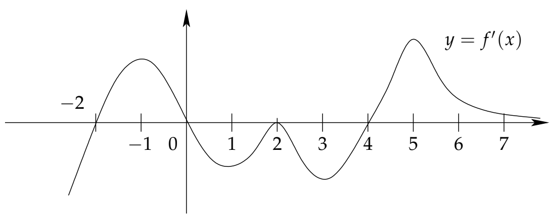
22. Determine, caso exista, a constante a para que $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ tenha

(a) um ponto de mínimo local em $x = 2$.

(b) um ponto de mínimo local em $x = -3$.

Mostre ainda que, para qualquer valor de a, a função f não terá um ponto de máximo local.

23. Seja f uma função cuja derivada tem o gráfico esboçado na figura abaixo:



(a) Em que intervalos f é crescente ou decrescente?

(b) Para quais valores de x f tem um máximo ou mínimo local?

(c) Em que intervalos f tem concavidade para cima ou para baixo?

(d) Ache os pontos de inflexão de f.

(e) Admitindo que $f(0) = 0$, faça um esboço do possível gráfico de f.

24. (Transferência Fuvest 2013) Seja $f(x) = ax + \frac{b}{x^2}$, em que a e b são números reais. Sabe-se que $x = 1$ é ponto de máximo local e que $f(1)f(-1) = -3$, Nessas condições, $a + b$ vale

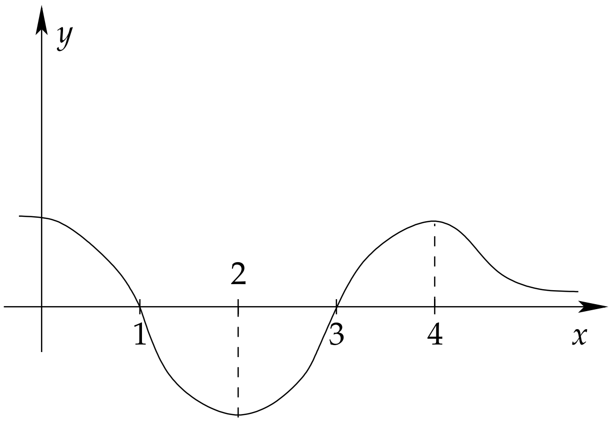
a. -3. **b.** -1. **c.** 0. **d.** 1. **e.** 3.

25. Seja $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 7$. O ponto $x = -2$ é ponto de

a. máximo local mas não global. **b.** mínimo local mas não global.

c. máximo global. **d.** mínimo global. **e.** inflexão.

26. (Transferência Fuvest 2007) Seja f uma função derivável até segunda ordem e suponha que o gráfico da função derivada f' seja representado pela figura abaixo:



Pode-se afirmar que a única alternativa incorreta é

a. f possui concavidade para cima no intervalo $]1, 2[$.

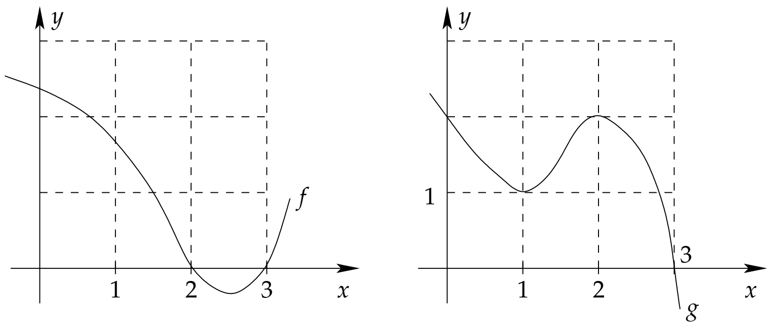
b. $x = 1$ é ponto de máximo local de f e $x = 3$ é ponto de mínimo local de f.

c. f possui concavidade para cima no intervalo $]3, 4[$.

d. f é crescente para $x < 1$ e também para $x > 3$ e decrescente para $1 < x < 3$.

e. $x = 2$ e $x = 4$ são pontos de inflexão de f.

27. (Transferência 2017) Considere as funções deriváveis f e g cujos gráficos estão esboçados abaixo:



Seja $h = f \circ g$. Sabendo que $x = 1$ é ponto de mínimo local de g e que $g(1) = 1$, é correto afirmar que

a. $h'(1) > 0$.

b. $h'(1) < 0$.

c. $x = 1$ é ponto de inflexão de h.

d. $x = 1$ é ponto de mínimo local de h.

e. $x = 1$ é ponto de máximo local de h.

28. Seja $f(x) = \dfrac{4x+5}{x^2-1}$. Prove que f tem exatamente um ponto de inflexão e que esse ponto pertence ao intervalo $]-3, -2[$. Esboce o gráfico de f.

29. No seu livro de Cálculo de 1696, L'Hôpital ilustrou sua regra com o limite da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

quando $x \to a$, $a > 0$. O valor desse limite é:

a. a. **b.** a^2. **c.** $3a/2$. **d.** $16a/9$. **e.** 0.

30. Calcule, caso exista

(a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} \dfrac{\ln(1-2x)}{\mathrm{tg}(\pi x)}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\mathrm{cotg}\, x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 1^+} (\ln x)^{(x-1)}$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^{2x}}$ (e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{x^2}}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^p \ln x,\ p>0$

(g) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\mathrm{tg}(x^2)}$ (h) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right)$ (i) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x\mathrm{sen}\, x)^{\mathrm{tg}\, x}$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} (\mathrm{e}^x + 3x)^{\frac{1}{x}}$ (k) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{1-\cos x} - \dfrac{2}{x^2}\right)$ (l) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)$

(m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x\, \mathrm{arctg} x}$ (n) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} (\mathrm{tg}\, x \sec x - \sec^2 x)$ (o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \sin\, x + 2x^2}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2}$

(p) $\lim\limits_{x\to 0} (1+5x)^{\frac{3}{x}}$ (q) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\mathrm{sen}\, 2x)^{\frac{1}{\mathrm{sen}\, x}}$ (r) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\mathrm{sen}\, x)^{\frac{1}{\ln x}}$

(s) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+3x)^{\frac{1}{\mathrm{arctg}(2x)}}$ (t) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1-\cos x)^x$ (u) $\lim\limits_{x\to 1^-} (2-x)^{\mathrm{tg}(\frac{\pi x}{2})}$

(v) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{6x+1}{6x-1}\right)^x$ (w) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln(x+3)^{x+4} - \ln(x+2)^{x+4}\right)$ (x) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{arctg}(2x^2)}{\ln(1+3x^2)}$

31. Sejam $a, b > 0$. Mostre que $\lim\limits_{x\to+\infty} (a^x + b^x)^{1/x} = \max\{a, b\}$.

32. Esboce o gráfico das funções abaixo e dê as equações das assíntotas, quando existirem.

(a) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$ (b) $f(x) = 3 + \dfrac{x}{x^2+1}$ (c) $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-8}{x+2}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ (e) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ (f) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

(g) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ (h) $f(x) = x - 5\ln(x+2) - \dfrac{6}{x+2}$ (i) $f(x) = \mathrm{arctg}(\ln x)$

(j) $f(x) = x^2 \ln x$ (k) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x}$ (l) $f(x) = (3 - \dfrac{6}{x})\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}$

(m) $f(x) = \dfrac{8\ln(x+3)}{(x+3)^2}$ (n) $f(x) = \ln(2x) - \ln(3x^2+3)$ (o) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$

(p) $f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{3x}$ (q) $f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$ (r) $f(x) = x^x$

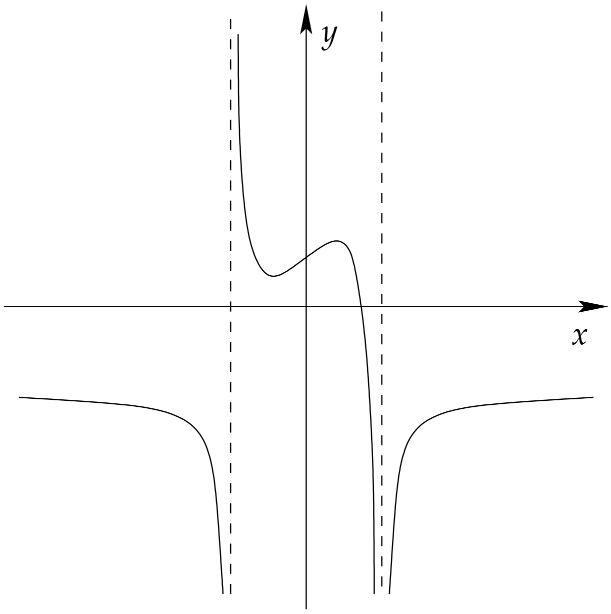
33. Seja $f\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^{(x^2)}$. Então:

a. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ e f é estritamente crescente.
b. nenhuma das outras alternativas é correta.
c. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ e f tem um ponto de mínimo local.
d. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ e f tem um ponto de mínimo local.
e. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ e f é estritamente crescente.

34. A função $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + 4}{x+3}$ possui $y = 2x + 5$ como assíntota. Então, $a + b$ vale

a. 10. **b.** 11. **c.** 12. **d.** 13. **e.** 14.

35. (Transferência Fuvest 2002) Sabendo que a figura abaixo é o esboço do gráfico de uma função $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, em que p e q são polinômios, tem-se



a. grau $p =$ grau $q \geq 2$.
b. grau $p =$ grau $q \leq 2$.
c. grau $p >$ grau $q > 2$.
d. grau $p >$ grau $q = 2$.
e. grau $p <$ grau $q = 2$.

36. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável e seja $a \in \mathbb{R}$ fixado. Verifique se as afirmações são **verdadeiras** ou **falsas**. Justifique.

(a) Se $f'(x) > 0$, para todo $x > a$, então $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(b) Se f é derivável até segunda ordem com $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$, para todo $x > a$, então $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(c) Se $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ então $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

(d) Se existe uma assíntota para f (quando $x \to +\infty$) com coeficiente angular m e se existe $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = L$, então $L = m$.

(e) Se $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = m \in \mathbb{R},\ m \neq 0$ então f tem uma assíntota com coeficiente angular igual a m.

37. Seja $f(x) = (x+6)e^{1/x}$. Para quais valores de k a equação $f(x) = k$ tem exatamente duas soluções reais?

38. Ache o ponto de mínimo de $f(x) = e^x/x$ no intervalo $]0, +\infty[$. Use isso para provar que $\dfrac{e^{a+b}}{ab} \geq e^2$, para todos $a > 0$ e $b > 0$.

39. Esboce o gráfico de $f(x) = x^2e^{-x}$ e então determine, em função de k, o número de soluções reais da equação $ke^x = x^2$.

40. Seja $f(x) = 5x^2 + \dfrac{a}{x^5},\ x > 0$, onde $a > 0$. Ache o menor valor de a para o qual tem-se $f(x) \geq 28$, para todo $x > 0$.

41. (P2, 2016) Seja $f(x) = e^{2x^3+9x^2}$ definida no intervalo fechado $[-5, 1]$. Se a é o valor máximo de f e se b é o valor mínimo de f, então o produto ab é

a. e^{27}. **b.** e^{-14}. **c.** e^2. **d.** e^{-27}. **e.** e^{-38}.

42. (Transferência Fuvest 2012) Seja $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$. Então, o coeficiente angular máximo das retas tangentes ao gráfico de f é

a. $\frac{1}{4}$. **b.** $\frac{1}{8}$. **c.** 0. **d.** $-\frac{1}{8}$. **e.** $-\frac{1}{4}$.

4. (a) -1; $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{\frac{17}{8}}$; $\sqrt{3+\sqrt{\frac{32}{27}}}$
(c) $1; \frac{1}{4} + \ln 4$ (d) $\sqrt[3]{-3}$; 0 (e) $0; 27$

10. **b.**

12. $4 < k < 5$

15. **b.**

16. **a.**

17. Dica: e se tivesse infinitas?

20. $a \leq e^{\frac{1}{e}}$

21. **c.**

22. (a) $a = 16$; (b) $a = -54$

24. **a.**

25. **d.**

26. **a.**

27. **e.**

29. **d.**

30.

(a) 0	(b) 0	(c) 1	(d) 0	(e) 0
(f) 0	(g) 1	(h) 1	(i) 1	(j) e^4
(k) $\frac{1}{6}$	(l) $+\infty$	(m) 1	(n) $-\frac{1}{2}$	(o) 3
(p) e^{15}	(q) e^2	(r) e	(s) $e^{\frac{3}{2}}$	(t) 1
(u) $e^{\frac{2}{\pi}}$	(v) $\sqrt[3]{e}$	(w) 1	(x) $\frac{2}{3}$	

33. **d.**

34. **d.**

35. **a.**

36. Verdadeiras: (b) e (d)

37. $0 < k < 4e^{-1/2}$ ou $k > 9\sqrt[3]{e}$

38. (a) 1

39. Não há soluções se $k < 0$; tem 1 solução se $k = 0$ ou $k > \frac{4}{e^2}$; tem 2 soluções se $k = \frac{4}{e^2}$; tem 3 soluções se $0 < k < \frac{4}{e^2}$.

40. $a = 2^8$

41. **c.**

42. **b.**