MAT-0321 – CÁLCULO INTEGRAL
QUARTA LISTA DE EXERCÍCIOS – SUBVARIEDADES EM $\mathbb{R}^n$

PROF. ALEXANDRE LYMBEROPOULOS

Exercício 1. Sejam M uma $k-$variedade em $\mathbb{R}^m$ e N uma l-variedade em $\mathbb{R}^n$. Mostre que $M \times N$ é uma $k+l$-variedade em $\mathbb{R}^{m+n}$.

Exercício 2. Mostre que se M é uma k-variedade em $\mathbb{R}^n$ então para todo $x \in M$ existe aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, $x \in U$, aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ e um difeomorfismo $h : U \to V$ tais que

$$h(U \cap M) = V \cap \left(\mathbb{R}^k \times \{0\}\right) = \{y \in V : y_{k+1} = \ldots = y_n = 0\}.$$

Exercício 3. Mostre que um toro sólido é uma 3-variedade e seu bordo é o toro.

Exercício 4. Seja $E_1^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0 \text{ e } x_2, \ldots x_n > 0\}$. Se $M \subset E_1^n$ é uma k-variedade, mostre que N, o conjunto obtido pela rotação de M em torno do eixo Ox_n, é uma $k+1$ variedade. Estude o bordo de N em termos do bordo de M.

Exercício 5. Sejam $f : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe $\mathcal{C}^r$ e $M = f^{-1}(0)$ não vazio, tal que, para todo $x \in M$ temos $\text{Posto}\, Df(x) = n$. Sabemos que nessas condições M é uma k-variedade sem bordo em $\mathbb{R}^{n+k}$. Mostre que o conjunto

$$N = \{x \in \mathbb{R}^{n+k} : f_1(x) = \ldots = f_{n-1}(x) = 0 \text{ e } f_n(x) \geq 0\}$$

é uma $k+1$-variedade e $\partial N = M$ se, para todo $x \in N$, temos que $\left[\frac{\partial(f_1,\ldots,f_{n-1})}{\partial x}\right]$ tem posto $n-1$.

Exercício 6. Quais as condições para que as soluções do sistema

$$\begin{cases} f(x,y,z) & = & 0 \\ g(x,y,z) & = & 0 \end{cases}$$

seja uma 1-variedade sem bordo em $\mathbb{R}^3$? Suponha que $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ são de classe C^1.

Exercício 7. Mostre que o hemisfério superior da esfera $S^{n-1}(a) \subset \mathbb{R}^n$, isto é,

$$E_+^{n-1}(a) = S^{n-1}(a) \cap H^n$$

é uma $n-1$ variedade e determine seu bordo.

Exercício 8. Seja $\mathcal{O}(3)$ o conjunto de todas as matrizes 3×3 ortogonais visto como um subespaço de $\mathbb{R}^9$.

a. Mostre que $\mathcal{O}(3)$ é imagem inversa de 0 por alguma função diferenciável.
b. Mostre que $\mathcal{O}(3)$ é uma 3-variedade compacta e sem bordo em $\mathbb{R}^9$.
c. Determine $T_{Id}\mathcal{O}(3)$ e determine $T_A\mathcal{O}(3)$ em termos de A e de $T_{Id}\mathcal{O}(3)$.

Exercício 9. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto tal que a fronteira de A, isto é, $\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$, é uma $n-1$-variedade. Mostre que $N = A \cup \text{Fr}(A)$ é uma n-variedade com bordo. Construa um exemplo onde $N = A \cup \text{Fr}(A)$ é uma variedade com bordo, mas $\partial N \neq \text{Fr}(A)$.

Exercício 10. Mostre que:

a. Se M é uma k-variedade em $\mathbb{R}^n$ com $k < n$ então M tem medida nula.
b. Se M é n-variedade fechada com bordo em $\mathbb{R}^n$ então $\partial M = \text{Fr}(M)$. Dê um contra exemplo se M não é fechada.
c. Se M é n-variedade com bordo compacta em $\mathbb{R}^n$ então M é J-mensurável.