

MAT-0321 – CÁLCULO INTEGRAL
TERCEIRA LISTA DE EXERCÍCIOS – TENSORES E FORMAS DIFERENCIAIS

PROF. ALEXANDRE LYMBEROPOULOS

Exercício 1. Se ω um 1-tensor em \mathbb{R}^n então existe uma matriz $1 \times n$, digamos A , tal que $\omega(y) = Ay$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Se $T \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ determine a matriz que representa o 1-tensor $T^*\omega$ em \mathbb{R}^m .

Exercício 2. Mostre que se ω é um tensor simétrico então $Alt(\omega) = 0$. Vale a recíproca?

Exercício 3. Sejam x_1, \dots, x_k vetores em \mathbb{R}^n e $X = [x_1 \cdots x_k]$. Se $I = (i_1, \dots, i_k)$ é uma k -upla arbitrária do conjunto $\{1, \dots, n\}$ mostre que

$$\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge \phi_{i_k}(x_1, \dots, x_k) = \det(X_I).$$

Exercício 4. Seja $\omega : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ um 2-tensor alternado. Mostre que, se m é ímpar, então existe $v \in \mathbb{R}^m$ não nulo tal que $\omega(v, u) = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^m$.

Exercício 5. Mostre que a cada $\omega \in \Lambda^{m-1}(\mathbb{R}^m)$ corresponde um único $v \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\omega \wedge f(v_1, \dots, v_m) = f(v) \text{vol}(v_1, \dots, v_m),$$

para toda $f \in \Lambda^1(\mathbb{R}^m)$ e todos $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^m$. Mostre ainda que a correspondência $\omega \mapsto v$ é um isomorfismo entre os espaços vetoriais $\Lambda^{m-1}(\mathbb{R}^m)$ e \mathbb{R}^m .

Dica. Basta verificar para qualquer base ortonormal positiva de \mathbb{R}^m .

Exercício 6. Mostre que se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ são diferenciáveis então $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ e $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Exercício 7. Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva diferenciável. Mostre que o vetor velocidade de γ no instante t é $v = \gamma_*(t)(1)$. Mostre também que se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável, então o vetor tangente a $f \circ \gamma$ em t é $f_*(v)$.

Exercício 8. Considere as 1-formas em \mathbb{R}^3 dadas por

$$\begin{aligned}\omega &= xy \, dx + 3 \, dy - yz \, dz \text{ e} \\ \eta &= x \, dx - yz^2 \, dy + 2x \, dz.\end{aligned}$$

Mostre, calculando diretamente, que $d^2\omega = 0$ e $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta - \omega \wedge d\eta$.

Exercício 9. Seja $\omega \in \Omega^k(A)$, onde $A \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto. Dizemos que ω é nula em $x \in A$ se $\omega(x)$ é o 0-tensor.

a. Mostre que se ω é nula numa vizinhança de $x_0 \in A$ então $d\omega$ é nula de em x_0 .

b. Construa um exemplo onde ω é nula em x_0 , mas $d\omega$ não é nula em x_0 .

Exercício 10. Sejam $\eta, \theta \in \Omega^1(A)$, onde A é aberto de \mathbb{R}^3 tais que $\eta \wedge \theta(x) \neq 0$ para todo $x \in A$. Se ω é uma forma satisfazendo $\omega \wedge \eta = \omega \wedge \theta = 0$ mostre que existe $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\omega = f \eta \wedge \theta$.

Exercício 11. Sejam $\omega, \eta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$. Se $\omega(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$ e $\omega \wedge \eta = 0$ então existe uma função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , tal que $\eta = f \omega$.

Exercício 12. Sejam $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $d(f\omega) = 0$ se e somente se a 1-forma $\alpha = \omega - 1/f dx_{n+1}$ em \mathbb{R}^{n+1} satisfaz $\alpha \wedge d\alpha = 0$.

Exercício 13. Seja $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e considere a 1-forma dada por

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy.$$

Mostre que ω é fechada e exata em A .

Exercício 14. Sejam $A = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e m um inteiro positivo fixado. Considere a $n - 1$ forma em A dada por

$$\eta = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n,$$

onde $f_i(x) = x/|x|^m$ e \widehat{dx}_i significa que dx_i é omitido daquela parcela.

a. Calcule $d\eta$.

b. Para quais valores de m temos $d\eta = 0$?

Exercício 15. O operador $d : \Omega^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ pode ser visto como um tipo de derivada direcional. Isso é que o garante o teorema abaixo, que será demonstrado neste exercício.

Teorema 0.1. Sejam A um aberto de \mathbb{R}^n e $\omega \in \Omega^{k-1}(A)$. Dados v_1, \dots, v_k em \mathbb{R}^n definimos as funções $h, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, respectivamente, por

$$\begin{aligned} h(x) &= d\omega(x)(v_1(x), \dots, v_k(x)) \text{ e} \\ g_j(x) &= \omega(x)(v_1(x), \dots, \widehat{v}_j(x), \dots, v_k(x)). \end{aligned}$$

Então

$$h(x) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} Dg_j(x)(v_j).$$

Demonstração: Siga os seguintes passos:

a. Seja $X = [v_1 \cdots v_k]$, matriz $n \times k$. Para cada $1 \leq j \leq k$ defina $Y_j = [v_1 \cdots \widehat{v}_j \cdots v_k]$, matriz $n \times k - 1$. Dada a k -upla $I = (i, i_1, \dots, i_k)$ mostre que

$$\det X(i, i_1, \dots, i_k) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} v_{ij} \det Y_j(i_1, \dots, i_{k-1}).$$

b. Verifique a validade do teorema se $\omega = f dx_I$, ou seja, se $\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$.

c. Conclua o resultado enunciado. □

Exercício 16. Seja A um aberto de \mathbb{R}^n . Denote por $\mathcal{S}(A)$ o conjunto dos campos escalares sobre A e por $\mathcal{X}(A)$ o conjunto dos campos de vetores sobre A . Mostre que existem isomorfismos α_i e β_j entre espaços vetoriais como nos diagramas abaixo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(A) & \xrightarrow{\alpha_0} & \Omega^0(A) & & \mathcal{X}(A) & \xrightarrow{\beta_{n-1}} & \Omega^{n-1}(A) \\ & & \downarrow \nabla & & & & \downarrow d \\ & & & & \text{e} & & \\ & & & & & & \downarrow d \\ \mathcal{X}(A) & \xrightarrow{\alpha_1} & \Omega^1(A) & & \mathcal{S}(A) & \xrightarrow{\beta_n} & \Omega^n(A) \end{array}$$

tais que $d \circ \alpha_0 = \alpha_1 \circ \nabla$ e $d \circ \beta_{n-1} = \beta_n \circ \text{div}$, onde ∇f é o campo gradiente de uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\nabla f(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) e_i(p)$$

e $\text{div } F$ é o divergente de um campo de vetores $F = (F_1, \dots, F_n)$ em A dado por

$$\text{div } F(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(p) = \text{Tr } DF(p).$$

Exercício 17. Para cada campo de vetores $F = (F_1, F_2, F_3)$ em \mathbb{R}^3 defina as formas

$$\begin{aligned} \omega_F &= F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz, \\ \eta_F &= F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy \end{aligned}$$

a. Mostre que $df = \omega_{\nabla f}$, $d\omega_F = \eta_{\text{rot } F}$ e $d\eta_F = \text{div } F dx \wedge dy \wedge dz$.

b. Use as identidades acima para provar que $\text{rot } \nabla f = 0$ e $\text{div rot } F = 0$.

Exercício 18. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$ uma função de classe C^∞ . Mostre, através de cálculos diretos que

$$df_1 \wedge df_3 \wedge df_5 = \det M dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_5,$$

onde M é a matriz composta das colunas 1, 3 e 5 da matriz de Df na base canônica.

Exercício 19. Sejam $\omega = xy dx + 2z dy - y dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(u, v) = (uv, u^2, 3u + v).$$

Calcule diretamente $d\omega$, $f^*(d\omega)$ e $d(f^*\omega)$.

Exercício 20. Demonstre o teorema abaixo.

Teorema 0.2 (Expressão para calcular $f^*\omega$). *Sejam A um aberto de \mathbb{R}^k e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^∞ , $x \in \mathbb{R}^k$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Se $I = (i_1, \dots, i_l)$ é uma l -upla ascendente em $\{1, \dots, n\}$ ¹ então*

$$f^*(dy_I) = \sum_{[J]} \left(\det \frac{\partial f_I}{\partial x_J} \right) dx_J,$$

onde $dz_I = dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_l}$, $f_I = (f_{i_1}, \dots, f_{i_l})$ para toda r -upla ascendente $I = (i_1, \dots, i_r)$ e $[J]$ é o conjunto de todas as l -uplas ascendentes do conjunto $\{1, \dots, k\}$.

Exercício 21. Neste exercício obtemos condições necessárias e suficientes para que os isomorfismos lineares α_i e β_j definidos no exercício 16 tenham bom comportamento quando submetidas a ação de um difeomorfismo $f : A \rightarrow B$ entre abertos de \mathbb{R}^n .

Sejam então $f : A \rightarrow B$ um difeomorfismo entre abertos de \mathbb{R}^n , $x \in A$ e $y \in B$. Ao campo de vetores em A dado por $F(x) = f(x)_x$ associamos o campo $G(y) = f_* \left(F(f^{-1}(y)) \right)$ em B .

a. Mostre que $f^*(\alpha_1 G) = \alpha_1 F$ para todo campo de vetores F em A se e somente se a matriz de $Df(x)$ na base canônica é ortogonal para todo $x \in A$.

Dica. Mostre que $f^*(\alpha_1 G) = \alpha_1 F$ equivale a $Df(x)^t Df(x)(f(x)) = f(x)$.

b. Mostre que $f^*(\beta_{n-1} G) = \beta_{n-1} F$ para todo campo F se e somente se $\det Df(x) = 1$.

Dica. Mostre que $f^*(\beta_{n-1} G) = \beta_{n-1} F$ equivale a $f(x) = \det Df(x) f(x)$.

¹isto é, $i_r \leq i_s$ sempre que $r \leq s$.

c. Para cada campo escalar h em A associamos o campo escalar $k = h \circ \alpha^{-1}$ em B . Mostre que $f_*(\beta_n k) = \beta_n h$ para toda h se e somente se $\det Df = 1$.

Exercício 22. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo. Suponha que toda forma fechada em U também é exata. Mostre que o mesmo vale em $f(U)$.

Dica. Pense em pull-backs.

Exercício 23. Seja $\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow]0, 2\pi[$ a segunda coordenada da inversa de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada no exercício 22 da lista 2. Mostre que

$$\int_{C_{r,n}} d\theta = 2\pi n,$$

onde $C_{r,n}$ é o 1-cubo singular dado por $C_{r,n} = (\cos 2\pi nt, \sin 2\pi nt)$.

Use o teorema de Stokes para 1-cadeias singulares para concluir que $C_{r,n}$ não pode ser o bordo de nenhuma 2 cadeia em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Exercício 24. Sejam c_1 e c_2 1-cubos singulares em \mathbb{R}^2 satisfazendo $c_1(0) = c_2(0)$ e $c_1(1) = c_2(1)$. Mostre que existe um um 2-cubo singular c tal que $\partial c = c_1 - c_2 + c_3 - c_4$ onde c_3 e c_4 são degenerados, ou seja, pontos em \mathbb{R}^2 . Conclua que

$$\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega$$

para toda 1-forma exata ω de \mathbb{R}^2 . Dê um contra-exemplo em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ quando ω é fechada, mas não é exata.

Exercício 25. Mostre que Se ω é uma 1-forma num aberto de \mathbb{R}^2 e

$$\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega$$

para todos 1-cubos singulares com $c_1(0) = c_2(0)$ e $c_1(1) = c_2(1)$, então ω é exata.

Dica. Lembre-se da construção de uma função potencial para um campo de vetores em \mathbb{R}^2 feita em sala.

Exercício 26 (“Bônus” - Introdução às funções analíticas). Uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é diferenciável em z_0 se

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Se f é diferenciável em todo ponto de um aberto $A \subset \mathbb{C}$ e f' é continua em A então dizemos que f é *analítica* em A .

a. Mostre que $f(z) = z$ é analítica e $f(z) = \bar{z}$ não o é. Mostre que somas, produtos e quocientes de funções analíticas também são analíticas.

b. Mostre que se $f(z) = u(z) + iv(z)$, onde para $z = x + iy$ temos $u(z) = u(x, y) = \Re f(z)$ e $v(z) = v(x, y) = \Im f(z)$, é analítica então $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$ (equações de Cauchy-Riemann). Vale a recíproca?

c. Seja $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma transformação \mathbb{R} -linear. Mostre que T corresponde a uma multiplicação por um número complexo se e somente se $a = d$ e $b = -c$, onde $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é a matriz de T em relação à base $\{1, i\}$. Com isso considerando $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica como uma função diferenciável de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 temos que $Df(z_0)$ corresponde à multiplicação por um número complexo. Determine esse número.

d. Se $\omega, \eta, \mu, \lambda$ são formas diferenciais em um aberto de \mathbb{R}^2 definimos

$$d(\omega + i\eta) = d\omega + id\eta, \quad \int_c \omega + i\eta = \int_c \omega + i \int_c \eta,$$

$$dz = dx + idy, \quad (\omega + i\eta) \wedge (\mu + i\lambda) = (\omega \wedge \mu - \eta \wedge \lambda) + i(\eta \wedge \mu + \omega \wedge \lambda).$$

Mostre que $d(f dz) = 0$ se e somente se f satisfaz as equações de Cauchy-Riemann.

e. Se f é analítica em A então $\int_c f dz = 0$ para toda curva fechada tal que $c = \partial c'$ para alguma 2-cadeia c' em A .

f. Mostre que $dz/z = id\theta + dh$ para alguma função $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ e conclua que $\int_{C_{r,n}} (1/z) dz = 2\pi i n$.

g. Se f é analítica no disco unitário aberto, D , mostre que $f(z)/z$ o é em $D \setminus \{0\}$ e

$$\int_{C_{r_1,n}} \frac{f(z)}{z} dz = \int_{C_{r_2,n}} \frac{f(z)}{z} dz,$$

para $0 < r_1, r_2 < 1$.

Usando o item acima para calcular $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_{r,n}} \frac{f(z)}{z} dz$, conclua o resultado abaixo.

Teorema 0.3 (Fórmula Integral de Cauchy). *Sejam $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica e c uma curva fechada em $D \setminus \{0\}$ então*

$$\int_c \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i n f(0),$$

onde n é o winding number da curva c em torno da origem.

O winding number em torno da origem de uma curva fechada c com imagem em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ é o único inteiro n tal que $c - C_{1,n} = \partial c'$ para alguma 2-cadeia c' . (É necessário verificar a existência e unicidade de tal n).