# MAT-0321 – CÁLCULO INTEGRAL
# SEGUNDA LISTA DE EXERCÍCIOS – INTEGRAÇÃO EM $\mathbb{R}^n$

PROF. ALEXANDRE LYMBEROPOULOS

**Exercício 1.** Seja $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$
Mostre que $f$ é integrável e que $\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,1]} f = \frac{1}{2}$.

**Exercício 2.** Seja $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ é irracional}, \\ 0, & \text{se } x \text{ é racional e } y \text{ é irracional}, \\ \frac{1}{q}, & \text{se } x \text{ é racional e } y = \frac{p}{q} \text{ na forma irredutível.} \end{cases}$$
Mostre que $f$ é integrável e que $\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,1]} f = 0$.

**Exercício 3.** Mostre que um conjunto ilimitado não pode ter conteúdo nulo.

**Exercício 4.** Dê um exemplo de conjunto fechado de medida nula que não tem conteúdo nulo.

**Exercício 5.** Mostre que se $A$ é um conjunto de conteúdo nulo então seu bordo também tem conteúdo nulo.

**Exercício 6.** Mostre que se $f$ e $g$ são limitadas e integráveis sobre um conjunto limitado $A \subset \mathbb{R}^n$ então $fg$ também o é.

**Exercício 7.** Mostre que:

**a.** se $C$ tem conteúdo nulo então $C$ é limitado por um retângulo fechado $A$, $C$ é $J$-mensurável e $\int_A \chi_C = 0$.

**b.** Se $C$ é limitado, tem medida nula e $\int_A \chi_C$ existe então $\int_A \chi_C = 0$.

*Dica.* Determine $L(f,P)$ para uma partição $P$ qualquer de $A$ e use que um retângulo não pode ter conteúdo nulo.

**Exercício 8.** Dê um exemplo de conjunto limitado $C$ tal que $\int_A \chi_C$ não existe.

**Exercício 9.** Mostre que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é crescente, então $f$ é integrável.

**Exercício 10.** Sejam $A$ um conjunto $J$-mensurável e $\epsilon > 0$. Mostre que existe um compacto $C \subset A$, $J$-mensurável, tal que $\int_{A\setminus C} 1 < \epsilon$.

**Exercício 11.** Seja $f : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que
$$\int_a^b \int_a^y f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_x^b f(x,y)\,dy\,dx.$$

**Exercício 12.** Use o teorema de Fubini para dar um prova simples do Teorema de Schwarz, ou seja, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, se $f$ é uma função de classe $C^2$.

**Exercício 13.** Deduza uma fórmula para o cálculo do volume de um sólido em $\mathbb{R}^3$ obtido pela rotação de uma região $J$-mensurável no plano $yz$ ao redor do eixo $z$ (suponha que a região em questão não intercepta o eixo $z$).

**Exercício 14.** Seja $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ contínua com $\frac{\partial f}{\partial y}$ também contínua e defina $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ por $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$. Mostre que $F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$.

*Dica.* Escreva $F(y)$ como uma integral iterada.

A hipótese $f$ contínua é realmente necessária?

**Exercício 15.** Sejam $A$ e $B$ conjuntos $J$-mensuráveis em $\mathbb{R}^3$. Defina $A_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,c) \in A\}$ e $B_c$ de modo análogo. Suponha que $A_c$ e $B_c$ sejam, para cada $c$, conjuntos $J$-mensuráveis em $\mathbb{R}^2$ de mesma área. Mostre que $A$ e $B$ têm o mesmo volume.

**Exercício 16.** Seja $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{e^{-1/x}}{x^n}, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

**a.** Mostre que $f_n$ é contínua em $x_0 = 0$.

*Dica.* Mostre que $a < e^a$ para todo $a \in \mathbb{R}$ e depois defina $a = \frac{t}{2n}$ para mostrar que $\frac{t^n}{e^t} < \frac{(2n)^n}{e^{t/2}}$. Faça então $t = \frac{1}{x}$ e $x \to 0^+$.

**b.** Mostre que $f_n$ é diferenciável em $x = 0$.
**c.** Mostre que $f_n'(x) = f_{n+2}(x) - n f_{n+1}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
**d.** Conclua que $f_n$ é de classe $C^\infty$. Ela é analítica real?
**e.** Esboce o gráfico de $g(x) = f_0(x) f_0(1-x)$.
**f.** Seja $A = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ um retângulo em $\mathbb{R}^n$. Construa uma função, de classe $C^\infty$, $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\phi(x) > 0$ para $x \in \mathring{A}$ e $\phi(x) = 0$ em caso contrário.

**Exercício 17.** Mostre que a coleção de funções dadas por $\phi_{2m+1}(x) = f(x - m\pi)$, se $m \geq 0$, e $\phi_{2m}(x) = f(x + m\pi)$, se $m \geq 1$, onde

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+\cos(x)}{2}, & \text{se } -\pi \leq x \leq \pi, \\ 0, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

são uma partição da unidade. Determine o suporte de cada $\phi_i$ e mostre que cada $x \in \mathbb{R}$ tem uma vizinhança que intercepta no máximo três desses suportes.

**Exercício 18.** Sejam $S$ um subconjunto arbitrário de $\mathbb{R}^n$ e $x_0 \in S$. Dizemos que uma função $f : S \to \mathbb{R}$ é de classe $C^r$ em $x_0$ se existe um aberto $U$ contendo $x_0$ e uma função $g : U \to \mathbb{R}$, de classe $C^r$, tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in U \cap S$. Mostre nesse caso que se $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de classe $C^r$ cujo suporte está contido em $U$ então

$$h(x) = \begin{cases} \phi(x) g(x), & \text{se } x \in U \\ 0, & \text{se } x \notin \operatorname{supp} \phi. \end{cases}$$

é uma função bem definida e de classe $C^r$ em $\mathbb{R}^n$.

**Exercício 19.** Mostre que se $f : S \to \mathbb{R}$ é de classe $C^r$ em cada ponto $x_0 \in S \subset \mathbb{R}^n$ então $f$ pode ser estendida a uma função $h : A \to \mathbb{R}$, onde $A$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$ contendo $S$.

*Dica.* Determine uma cobertura apropriada para $S$, defina $A$ como sua reunião e então tome uma partição da unidade subordinada a esta cobertura.

**Exercício 20.** Seja $S$ a porção do primeiro quadrante de $R^2$ limitada pelas hipérboles $xy = 1$ e $xy = 2$, além das retas $y = x$ e $y = 4x$. Calcule $\int_S x^2 y^3\,dx\,dy$.

*Dica.* Considere $x = u/v$ e $y = uv$.

**Exercício 21.** Seja $S$ o tetraedro de vértices $(0,0,0), (1,2,3), (0,1,2)$ e $(-1,1,1)$. Calcule $\int_S x + 2y - z\,dx\,dy\,dz$.

*Dica.* Considere uma mudança que "endireita" o tetraedro.

**Exercício 22.** Defina $f : ]0,\infty[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2$ por $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

**a.** Mostre que $f$ é injetora, calcule $f'(r,\theta)$ e mostre que $\det f'(r,\theta) \neq 0$ para todo $(r,\theta)$. Determine o conjunto $f\big(]0,\infty[\times]0,2\pi[\big)$.

**b.** Explicite a expressão de $f^{-1}(x,y)$.

**c.** Seja $C \subset \mathbb{R}^2$ a região delimitada por círculos de raios $r_1$ e $r_2$, $0 < r_1 < r_2$ e pela retas que passam pela origem e fazem ângulo $\theta_1$ e $\theta_2$ com o eixo dos $x$, respectivamente. Se $h : C \to \mathbb{R}$ é uma função integrável tal que $h(x,y) = g\big(r(x,y), \theta(x,y)\big)$, mostre que

$$\int_C h = \int_{r_1}^{r_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} g(r,\theta) r\,d\theta\,dr.$$

Mostre também que se $B_r = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r\big\}$ então

$$\int_{B_r} h = \int_0^r \int_0^{2\pi} r g(r,\theta)\,d\theta\,dr.$$

**d.** Se $C_r = [-r,r]\times[-r,r]$, mostre que

$$\int_{B_r} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \pi(1-e^{-r^2}) \qquad \text{e} \qquad \int_{C_r} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \left(\int_{-r}^{r} e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

**e.** Prove também que

$$\lim_{r\to\infty}\int_{B_r} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \lim_{r\to\infty}\int_{C_r} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

e conclua que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

**Exercício 23.** Sejam $0 < a < b$. Considere o círculo no plano $xz$ de raio $a$ e centro em $(b,0,0)$. Ao rotacionar esse círculo em torno do eixo $z$ obtemos uma superfície chamada *toro* (vide exercício 17 da lista 1). Se realizamos esse processo com o disco ao invés invés do círculo obtemos o *toro sólido*. Determine o volume do toro sólido.

*Dica.* Você pode calcular isto diretamente, mas é bem mais conveniente utilizar as *coordenadas cilíndricas* do $\mathbb{R}^3$: $g(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$. Determine a região no domínio de $g$ que tem o toro como imagem.

O resultado obtido é um caso particular do exercício 13 desta lista.