MAT-0321 – CÁLCULO INTEGRAL
PRIMEIRA LISTA DE EXERCÍCIOS

PROF. ALEXANDRE LYMBEROPOULOS

Exercício 1. Justifique com detalhes a validade da propriedade (4) utilizada na demonstração feita em sala do Teorema da Função Inversa.

Exercício 2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.
a. Mostre que f é injetora no conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.
b. Descreva o conjunto $f(A)$.
c. Denotando por g a inversa de f, determine, se possível, $Dg(0,1)$.

Exercício 3. Repita o exercício acima para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$, sendo o conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < \pi/2\}$.

Exercício 4. Discuta a existência, continuidade e diferenciabilidade de funções implícitas dadas, numa vizinhança da origem, pelas seguintes funções:
a. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^3 - y^3$;
b. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x - y^3$;
c. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 - y^2$;
d. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2$;

Exercício 5. Considere a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x,y,z) = z^3 + 3z + 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y.$$

a. Mostre que a equação $F(x,y,z) = 0$ define uma função $z = f(x,y)$ de classe C^2 em todo o plano.
b. Determine os pontos críticos de f.
c. Classifique esse pontos críticos quanto a máximos locais, mínimos locais ou selas.
d. Escreva o polinômio de Taylor de ordem 1 e seu resto para f em torno de $(1,1)$.

Exercício 6. Seja $f : [0,2] \to \mathbb{R}_+^*$ uma função contínua tal que $\int_0^1 f(t)\,dt = \int_1^2 f(t)\,dt = 1$. Mostre que existe função $g : [0,1] \to [0,2]$, de classe C^1, tal que $\int_x^{g(x)} f(t)\,dt = 1$.

Exercício 7. Identificando os espaço das matrizes quadradas de ordem n, $M_n(\mathbb{R})$, com $\mathbb{R}^{n^2}$ definimos a função $f : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$ por $f(X) = X^2$.
a. Mostre que f é de classe C^∞.
b. Determine $Df(X_0)$ para cada $X_0 \in \mathbb{R}^{n^2}$.
c. Mostre que, numa vizinhança de $Y_0 = \mathrm{Id}$, cada matriz possui uma única raiz quadrada, isto é, para cada Y nessa vizinhança existe uma única matriz X tal que $X^2 = Y$.

Exercício 8. Seja $SL(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$.
a. Mostre que $SL(3)$ é, localmente, gráfico de uma função de classe C^∞.
b. Determine a dimensão do plano tangente em cada ponto desse gráfico.
c. Explicite o plano tangente ao gráfico de f em $X_0 = \mathrm{Id}$.

Exercício 9. Seja $S = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \text{Posto } A = 1\}$.

a. Mostre que S é, localmente, gráfico de uma função real de classe C^1.

b. Determine a dimensão do plano tangente em $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercício 10. Seja $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ um polinômio com coeficientes reais tal que x_0 é uma raiz real simples de $p(x)$.

a. Mostre que todo polinômio de grau n "suficientemente próximo" de $p(x)$ tem uma raiz real pŕoxima de x_0 que varia suavemente em termos do coeficiente do polinômio.

b. Determine a diferencial dessa função que associa os coeficientes do polinômio a essa raiz simples.

Pode-se obter resultado semelhante se a raiz de $p(x)$ não é simples? Dê exemplos.

Exercício 11. Seja $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1. Para cada $x \in \mathbb{R}^m$ considere a função $f_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $f_x(y) = f(x, y)$. Suponha que existam $a \in \mathbb{R}^m$ tal que f_a tem um ponto fixo $b \in \mathbb{R}^n$, isto é, $f_a(b) = b$ e que $Df_a(b)$ é uma transformação linear que não tem 1 como autovalor. Mostre que, para x suficientemente próximo de a a função f_x tem um único ponto fixo próximo de b que varia suavemente com x.

Exercício 12. Demonstre a seguinte versão da forma local das imersões:

Teorema 0.1. *Se $f : A \to \mathbb{R}^{n+p}$, de classe C^1 no aberto $A \subset \mathbb{R}^n$, é uma imersão em $x_0 \in A$ então existe um difeomorfismo $h : W \to U \times V$ entre os abertos W, contendo $f(x_0)$ e $U \times V \subset \mathbb{R}^n \times R^p$, contendo $(x_0, 0)$, tal que $h \circ f(x) = (x, 0)$ para todo $x \in U$.*

Exercício 13. Mostre que se $f : A \subset \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^p$ é de classe C^1 no aberto A com $n > 0$ então f não é injetora.

Exercício 14. Seja $f : A \to \mathbb{R}^k$ uma função de classe C^1 no aberto $A \subset \mathbb{R}^{n+k}$. Um vetor $c \in \mathbb{R}^k$ é *valor regular* de f se $Df(x)$ é sobrejetora, para todo $x \in f^{-1}(c)$.

Mostre que o gráfico de qualquer função $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é a imagem inversa de um valor regular.

Exercício 15. Mostre que a curva em $\mathbb{R}^3$ dada pelo sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ não é a imagem de um valor regular.

Exercício 16. O cone $z^2 = x^2 + y^2$ é imagem inversa de valor regular?

Exercício 17. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = z^2 + \left(2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2$. Mostre que 1 é valor regular de f e descreva $f^{-1}(1)$.

Mostre ainda que $f^{-1}(1)$ é gráfico de uma função $g : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ numa vizinhança de $(1, 0, 0)$. Determine o plano tangente a ao gráfico de g nesse ponto.

Exercício 18. Mostre que se c é valor regular de f então, para cada $x_0 \in f^{-1}(c)$ existem abertos $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^k$ tais que $f^{-1}(c) \cap (U \times V)$ é o gráfico de uma função $g : U \to V$ de classe C^1.

Exercício 19. Sejam $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma imersão injetora de classe C^1 e $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva de classe C^1 tal que $\gamma(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathbb{R}^2)$.

Mostre que existem $\delta > 0$ e $\alpha :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}^2$, de classe C^1 tal que $\gamma|_{]-\delta,\delta[} = \sigma \circ \alpha$.