MAT–2454 — Cálculo Diferencial e Integral II — EP–USP

Prova Substitutiva — 02/12/2019^{A}

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________ **Turma:** ______________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Carteiras, mochilas e blusas devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha à tinta, e de maneira legível, todos os campos acima.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 11h00min.
4. As questões podem ser feitas à tinta (azul ou preta) ou à lápis.
5. Utilize, se necessário, as páginas seguintes para rascunho. Só será considerado na correção das questões dissertativas o que estiver na folha com seu enunciado.
6. Mantenha a organização, limpeza e legibilidade na redação das questões dissertativas, **justificando todas as suas afirmações**.
7. Não destaque nenhuma folha de sua prova.

Assinatura: ____

BOA PROVA!

NOTAS

Questão	1	2	3	4	**Total**
Nota					

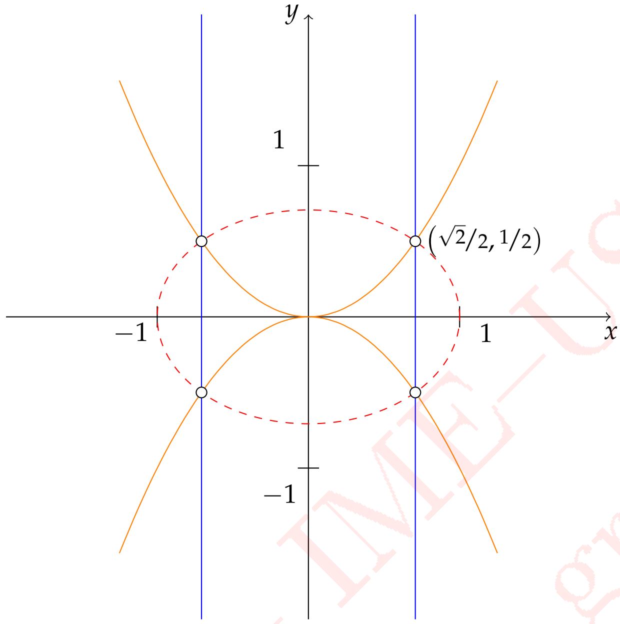
©Copyleft — IME–USP
Conteúdo oficial e gratuito!

Questão 1 (Valor: $2.5 = 0.5 + 1.5 + 0.5$ pontos)**.** Considere a função $f(x,y) = \dfrac{y^2 - x^4}{x^2 + 2y^2 - 1}$.

a. Determine o domínio de f e esboce-o na figura abaixo.

b. Determine a curva de nível $c = \dfrac{1}{2}$ e a curva de nível $c = 0$ de f. Esboce essas curvas na figura abaixo.

c. O limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)} f(x,y)$ existe? Justifique.



Solução.

a. $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + 2y^2 \neq 1\}$, ou seja, todo o plano exceto a elipse indicada na figura acima.

b. As curvas de nível pedidas são:

- $f^{-1}(1/2) = \{(x,y) \in D_f \colon f(x,y) = 1/2\}$, ou seja,

$$\frac{y^2 - x^4}{x^2 + 2y^2 - 1} = \frac{1}{2} \iff 2x^4 + x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

  A curva de nível é então o par de retas paralelas verticais indicado na figura acima.

- $f^{-1}(0) = \{(x,y) \in D_f \colon f(x,y) = 0\}$, ou seja,

$$\frac{y^2 - x^4}{x^2 + 2y^2 - 1} = 0 \iff y^2 = x^4 \iff y = \pm x^2.$$

  A curva de nível é então o par de parábolas indicado na figura acima.

c. O limite pedido não existe, pois as duas curvas de nível (distintos) acima tendem a passar pelo ponto em questão, conforme indicado na figura). Explicitamente:

- Se $\gamma(t) = \left(t, \dfrac{t^2}{2}\right)$ e $\eta(t) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, t\right)$ temos

$$\lim_{t\to\frac{\sqrt{2}}{2}} f\big(\gamma(t)\big) = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{t\to\frac{1}{2}} f\big(\eta(t)\big).$$

©Copyright — IME-USP
Conteúdo oficial e gratuito!

Questão 2 (Valor: $2.5 = 1.0 + 1.0 + 0.5$ pontos)**.** Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin^6 x}{x^4+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

a. Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, explicitando seus domínios.

b. Em quais pontos de $\mathbb{R}^2$ a função f é diferenciável? Justifique.

c. A função $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em $(0,0)$? Justifique.

Solução.

a. Aplicando a regra do quociente, para todo $(x,y) \neq (0,0)$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{6\sin^5 x \cos x}{x^4+y^2} + \frac{4x^3 \sin^6 x}{(x^4+y^2)^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y\sin^6 x}{(x^4+y^2)^2}.$$

Quando $(x,y) = (0,0)$ precisamos da definição (por que?):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin^6 h}{h^5} = \lim_{h\to 0} \sin h \left(\frac{\sin h}{h}\right)^5 = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k^3} = 0.$$

b. Em todo $(x,y) \neq (0,0)$, as derivadas parciais de f são quociente de funções contínuas, e portanto contínuas. Deste modo f é de classe $\mathcal{C}^1$ em tais pontos e portanto diferencial neles. Na origem é preciso verificar pela definição:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\sin^6 h}{\sqrt{h^2+k^2}(h^4+h^2)}}_{F(h,k)}.$$

Como $F(0,k) = 0$ e, para $h \neq 0$, temos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} F(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\sin^6 h}{h^6}}_{\to 1} \underbrace{\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\text{limitada}} \underbrace{\frac{h^4}{h^4+k^2}}_{\text{limitada}} \underbrace{h}_{\to 0} = 0,$$

donde f é diferenciável em $(0,0)$.

c. Calculemos o limite para verificar a continuidade de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (explicitada acima) ao longo da curva (t,t^2):

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial f}{\partial y}(t,t^2) = \lim_{t\to 0} \frac{-2t^2\sin^6 t}{(t^4+(t^2)^2)^2} = -\frac{1}{2}\lim_{t\to 0} \frac{\sin^6 t}{t^6} = -\frac{1}{2} \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Logo $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ não é contínua na origem.

©Copyleft — IME-USP
Conteúdo oficial e gratuito!

Questão 3 (Valor: $2.5 = 2.0 + 0.5$ pontos)**.** Sejam $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\gamma(t) = (3t, t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, uma curva cuja imagem está contida no gráfico de f. Seja r a reta tangente à curva de nível 8 de f no ponto $(6, 4)$. Sabendo que a reta r contém o ponto $(3, 6)$, determine:

a. O vetor gradiente de f no ponto $(6, 4)$.

b. A equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $\big(6, 4, f(6, 4)\big)$.

Solução.

a. A imagem de γ estar contida no gráfico de f nos diz que $f(3t, t^2) = t^3$. Sendo f diferenciável, isto nos diz que $\langle \nabla f(3t, t^2), (3, 2t)\rangle = 3t^2$, ou ainda, $3f_x(3t, t^2) + 2tf_y(3t, t^2) = 3t^2$. Em $t = 2$ isso dá

$$3f_x(6, 4) + 4f_y(6, 4) = 12. \tag{1}$$

A reta r contém os pontos $(6, 4)$ (de tangência) e $(3, 6)$. Isto nos diz que ela é paralela ao vetor $v = (6, 4) - (3, 6) = (3, -2)$. Como a reta é tangente à curva de nível 8 de f, temos $\nabla f(6, 4) \perp v$, ou seja, $\langle \nabla f(6, 4), v\rangle = 0$:

$$3f_x(6, 4) - 2f_y(6, 4) = 0. \tag{2}$$

Das equações (1) e (2) acima vem que $\nabla f(6, 4) = (4/3, 2)$.

b. O plano tangente ao gráfico de f em (x_0, y_0) tem equação

$$\pi\colon\ f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - z + f(x_0, y_0) = 0.$$

Neste caso $(x_0, y_0) = (6, 4)$ e, como $f(6, 4) = f\big(\gamma(2)\big) = 2^3 = 8$, temos

$$\boxed{\pi\colon 4/3(x - 6) + 2(y - 4) - z + 8 = 0 \iff \pi\colon 4x + 6y - 3z - 24 = 0.}$$

©Copyleft — IME-USP
Conteúdo oficial e gratuito!

Questão 4 (2.5 $= 1.5 + 1.0$ pontos)**.** Considere a função $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = 3x^2 + xz + y^2 + 3z^2$. Encontre os pontos de máximo e de mínimo de f em C, quando

a. $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.

b. $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } x + z = 2\}$.

Solução.

a. A região C em questão é a superfície esférica de raio 2 e centrada na origem, que é um conjunto compacto. Como f é contínua em C, o teorema de Weierstrass garante a existência de valor máximo e mínimo para f nesse conjunto. Os pontos onde tais valores são atingidos são encontrados via multiplicadores de Lagrange, onde a função objetivo é f e a restrição é a superfície de nível 0 da função $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$. Nos pontos procurados os gradientes de f e g devem ser linearmente dependentes[1], obtemos então o sistema

$$\begin{cases} \{\nabla f(x,y,z), \nabla g(x,y,z)\} \text{ é L.D.} \\ g(x,y,z) = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} \nabla f(x,y,z) \times \nabla g(x,y,z) &= \vec{0} \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4 &= 0. \end{cases}$$

Explicitando as coordenadas:

$$\begin{cases} y(x + 4z) &= 0 \\ x^2 - z^2 &= 0 \\ y(4x + z) &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 4. \end{cases}$$

Se $y = 0$ e $x^2 = z^2$ temos as soluções

$$\boxed{(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}), \quad (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}), \quad (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) \quad \text{e} \quad (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}).}$$

Se $x + 4z = 4x + z = 0$ e $x^2 = z^2$, as soluções são

$$\boxed{(0, 2, 0) \quad \text{e} \quad (0, -2, 0).}$$

Calculando os valores de f nesses pontos obtemos,

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) &= 14 \\ f(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}) = f(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) &= 10 \\ f(0, 2, 0) = f(0, -2, 0) &= 4. \end{aligned}$$

Deste modo o valor máximo de f em C é 14, atingido nos pontos $(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ e $f(-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$ e o valor mínimo é 4, atingido nos pontos $(0, 2, 0)$ e $(0, -2, 0)$.

b. De maneira análoga, agora com restrição dada pela interseção de duas superfícies de nível 0 (da função g acima e de $h(x,y,z) = x + z - 2$[2]), devemos ter que os gradientes de f, g e h devem ser linearmente dependentes[3]. Assim,

$$\begin{cases} \{\nabla f(x,y,z), \nabla g(x,y,z), \nabla h(x,y,z)\} \text{ é L.D.} \\ g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} [\nabla f(x,y,z), \nabla g(x,y,z), \nabla h(x,y,z)] &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4 &= 0 \\ x + z - 2 &= 0. \end{cases}$$

Explicitando as coordenadas temos o sistema

$$\begin{cases} y(x - z) &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 4 \\ x + z &= 2. \end{cases}$$

Se $y = 0$, temos as soluções $\boxed{(2, 0, 0) \text{ e } (0, 0, 2).}$ Se $x - z = 0$ as soluções são $\boxed{(1, \sqrt{2}, 1) \text{ e } (1, -\sqrt{2}, 1).}$

Calculando os valores de f nesses pontos obtemos,

$$\begin{aligned} f(2, 0, 0) = f(0, 0, 2) &= 12 \\ f(1, \sqrt{2}, 1) = f(1, -\sqrt{2}, 1) &= 9. \end{aligned}$$

O valor máximo de f sobre este conjunto é 12, atingido em $(2, 0, 0)$ e $(0, 0, 2)$. O valor mínimo é 9, aingindo em $(1, \sqrt{2}, 1)$ e $(1, -\sqrt{2}, 1)$.

© Copyright — IME–USP
Conteúdo oficial e gratuito!

[1] Paralelos, nesse caso.

[2] Respectivamente uma esfera e um plano, cuja interseção é um conjunto compacto.

[3] Coplanares, nesse caso.