MAT–2454 — Cálculo Diferencial e Integral II — EP–USP

Prova de Recuperação — 09/12/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ____________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Carteiras, mochilas e blusas devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha à tinta, e de maneira legível, todos os campos acima.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 11h00min.
4. As questões podem ser feitas à tinta (azul ou preta) ou à lápis.
5. Utilize, se necessário, as páginas seguintes para rascunho. Só será considerado na correção das questões dissertativas o que estiver na folha com seu enunciado.
6. Mantenha a organização, limpeza e legibilidade na redação das questões dissertativas, **justificando todas as suas afirmações**.
7. Não destaque nenhuma folha de sua prova.

Assinatura: ____

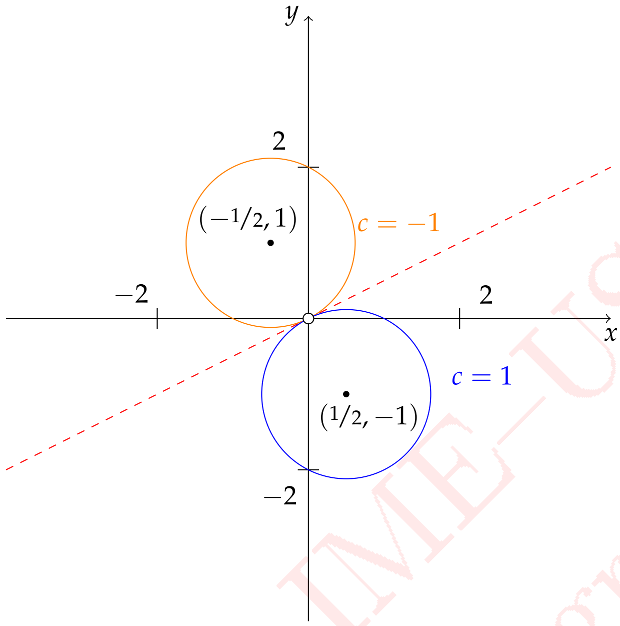
BOA PROVA!

NOTAS

Questão	1	2	3	4	**Total**
Nota					

Questão 1 (Valor: $2.5 = 1.0 + 1.0 + 0.5$ pontos)**.** Considere a função $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x-2y}$.

a. Encontre o domínio e a imagem de f. Esboce o domínio de f no espaço abaixo.
b. Encontre analiticamente e esboce (também no espaço abaixo) as curvas de nível $c = 1$ e $c = -1$ de f.
c. Existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Justifique.



Solução.

a. O domínio da função é conjunto $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \neq 2y\}$, indicado por um linha tracejada na figura acima. A imagem de f é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ uma vez que, restrita aos pontos do domínio sobre a reta $y = 0$, temos $f(x,0) = x$, $x \neq 0$ e $f(x,y) \neq 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$.

b. As curvas de nível pedidas são:

- $f^{-1}(1) = \{(x,y) \in D_f \colon f(x,y) = 1\}$: nesse caso temos

$$f(x,y) = 1 \iff x^2 + y^2 = x - 2y \iff x^2 - x + y^2 + 2y = 0 \iff \boxed{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{5}{4}},$$

  ou seja, o arco de circunferência indicado em azul na figura acima. Note que a origem não está incluída, pois não pertence ao domínio de f.

- $f^{-1}(-1) = \{(x,y) \in D_f \colon f(x,y) = -1\}$: nesse caso temos

$$f(x,y) = 1 \iff x^2 + y^2 = -x + 2y \iff x^2 + x + y^2 - 2y = 0 \iff \boxed{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4}}.$$

  Novamente um arco de circunferência indicado em agora em laranja na figura acima. Note que, como antes, a origem não está incluída.

- O limite proposto não existe, pois as curvas de níveis distintos calculadas acima aproximam-se arbitrariamente da origem, onde queremos estudar o limite de f. E outras palavras, se γ e η são paramentrizações de $f^{-1}(1)$ e $f^{-1}(-1)$, tais que $\displaystyle\lim_{t\to t_0} \gamma(t) = (0,0) = \lim_{t\to t_1} \eta(t)$, então

$$\lim_{t\to t_0} f\big(\gamma(t)\big) = 1 \neq -1 = \lim_{t\to t_1} f\big(\eta(t)\big).$$

Questão 2 (Valor: 2.5 = 1.5 + 1.0 pontos)**.** Considere a seguinte função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^4+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Calcule (caso existam) as derivadas direcionais de f no ponto $(0,0)$ nas direções unitárias $\vec{v} = (a,b)$.
b. O gráfico desta função admite plano tangente em $(0,0,0)$? Justifique.

Solução.
a. A derivada direcional de f em $(x_0, y_0$, na direção do vetor unitário $\vec{v} = (a,b)$, é determinada pelo limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+at, y_0+bt) - f(0,0)}{t}.$$

Neste exercício temos então que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(at,bt) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{abt^4}{t^3(a^4t^2+b^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{abt}{(a^4t^2+b^2)} = 0,$$

para todo vetor unitário $\vec{v} = (a,b)$.
b. Para o plano tangente em tela existir é necessário que f seja diferenciável em $(0,0)$, o que equivale a verificar se

(1) $$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Do item anterior, fazendo $\vec{v} = (1,0)$ e $\vec{v} = (0,1)$ temos, respectivamente, que $f_x(0,0) = 0$ e $f_y(0,0) = 0$. A definição de f e estes valores das derivadas parciais fazem o limite em (1) escrever-se como

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^3k}{(h^4+k^2)\sqrt{h^2+k^2}},$$

o qual não existe. De fato, Se $F(h,k)$ é a expressão dentro do limite temos, ao longo da curva $\gamma(t) = (t,t^2)$,

$$\lim_{t\to 0} F\big(\gamma(t)\big) = \lim_{t\to 0} \frac{t^5}{2t^4\sqrt{2t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{2\sqrt{2}|t|},$$

que não existe.

Questão 3 (Valor: 2.5 pontos)**.** Encontre e classifique todos os pontos críticos de $f(x,y) = x^2 + (xy-1)^2$.

Solução. Como f está definida em $\mathbb{R}^2$, que é um conjunto aberto, seus pontos críticos são aqueles que verificam $\nabla f(x,y) = (0,0)$, ou seja,

$$\begin{cases} 2x + 2(xy-1)y & = 0 \\ \qquad 2x(xy-1) & = 0. \end{cases}$$

Da segunda equação temos duas possibilidades:

- $xy = 1$ que, na primeira equação dá $x = 0$, uma contradição.
- $x = 0$ que impõe $y = 0$ na primeira equação.

Deste modo o único ponto crítico é $(0,0)$. Visando aplicar o critério do Hessiano, as segundas de f são $f_{xx} = 2 + 2y^2$, $f_{yy} = 2x^2$ e $f_{xy} = 4xy - 2$. O determinante Hessiano na origem é

$$H_f(0,0) = \det \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = -4,$$

donde a origem, o único ponto crítico, é um ponto de sela.

Questão 4 (Valor: 2.5 pontos)**.** Consideramos uma chapa delgada cuja forma é descrita pela região

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \le 1\}.$$

Suponha agora que a temperatura em um ponto $(x,y) \in D$ seja dada por $T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$. Justifique a existência de valor máximo e mínimo de T sobre D. Determine os pontos onde esses extremos da temperatura são atingidos, bem como seus valores.

Solução. A função T é contínua e o conjunto D é um compacto em $\mathbb{R}^2$. O teorema de Weierstrass garante então a existência de valor máximo e valor mínimo para T em D.

Para determinar tais pontos procuramos os candidatos no interior de D e em sua fronteira.

- $int(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}$ é um conjunto aberto e portanto os candidatos a ponto de máximo ou mínimo devem verificar $\nabla T = (0,0)$. Eles são as soluções do sistema

$$\begin{cases} 2x - 1 &= 0 \\ \quad 4y &= 0 \end{cases} \iff (x,y) = (1/2, 0) \in int(D).$$

  Nesse ponto temos $\boxed{T(1/2, 0) = -1/4}$.

- Em ∂D podemos utilizar o método dos multiplicadores de Lagrange para duas variáveis e uma restrição, notando que $\partial D = g^{-1}(0)$, onde $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. A teoria nos diz que os candidatos são os pontos (x,y) tais que $x^2 + y^2 = 1$ e $\{\nabla T(x,y), \nabla g(x,y)\}$ é linearmente dependente. Como $\nabla T(x,y) = (2x-1, 4y)$ e $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$ temos o sistema

$$\begin{cases} \det \begin{bmatrix} 2x-1 & 4y \\ 2x & 2y \end{bmatrix} &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 2y(2x+1) &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases} \implies (x,y) = (\pm 1, 0) \text{ ou } (x,y) = (-1/2, \pm\sqrt{3}/2).$$

  Os valores de T em cada um dos pontos são $\boxed{T(1,0) = 0}$, $\boxed{T(-1,0) = 2}$ e $\boxed{T(-1/2, \pm\sqrt{3}/2) = 9/4}$.

  Observação 1. Soluções alternativas para os candidatos em ∂D:
  - Parametrizar ∂D. Neste caso a curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ dá conta do recado. Basta então determinar os máximos e mínimos globais de $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = T(\gamma(t)) = 1 - \cos t + \sin^2 t$.
  - Eliminando uma variável. Usando que $x^2 + y^2 = 1$, podemos escrever $T(x,y) = T(x) = 2 - x^2 - x$.

Comparando os valores de T nos candidatos obtidos temos que o valor mínimo da temperatura na chapa é $-1/4$, obtido no ponto $(1/2, 0)$ e o máximo é $9/4$, obtido nos pontos $(-1/2, \pm\sqrt{3}/2)$.