**MAT–2454 — Cálculo Diferencial e Integral II— EP–USP**

**Terceira Prova— 25/11/2019**

IDENTIFICAÇÃO

**Nome:** ______________________________ **NUSP:** ______________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas *lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto*. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 11:00.
4. Utilize, se necessário, as folhas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Folha de respostas (última): Preencha, a tinta e completamente, os campos daquela folha. Deixe as **últimas colunas em branco**, caso seu número USP tenha menos de 8 dígitos. Isto deve ser feito **antes** da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale, **com atenção**, apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, o que deve ser evitado, assinale **também** a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.



**Assinatura:** ______________________________

BOA PROVA!

**Teste 1** [tan2sup1] A curva $\gamma$ é obtida pela intersecção das superfícies $x^2+y+z=1$ e $x^3+y^3+z^2=1$. A reta tangente à $\gamma$ no ponto $P=(1,-1,1)$ é paralela ao vetor:

■ $(1,1,-3)$. B $(5,1,9)$. C $(3,3,-2)$. D $(2,1,1)$. E $(1,1,0)$.

***Solução:*** O vetor tangente à curva $\gamma$ é ortogonal aos vetores normais às superfícies em cada ponto da curva. Sendo $f(x,y,z)=x^2+y+z-1$ e $g(x,y,z)=x^3+y^3+z^2-1$, tais vetores normais são, no ponto $P$, $\nabla f(P)=(2,1,1)$ e $\nabla g(P)=(3,3,2)$, que são linearmente independentes. Logo

$$\gamma'(t_0) \parallel \nabla f(P)\times\nabla g(P)=(2,1,1)\times(3,3,2)=(-1,-1,3).$$

**Teste 2** [tan2sup2] A curva $\gamma$ é obtida pela intersecção das superfícies $x^2+y+z=1$ e $x^3+y^3+z^2=1$. A reta tangente à $\gamma$ no ponto $P=(-1,1,-1)$ é paralela ao vetor:

■ $(5,1,9)$. B $(1,1,-3)$. C $(3,3,-2)$. D $(2,1,1)$. E $(1,1,0)$.

***Solução:*** O vetor tangente à curva $\gamma$ é ortogonal aos vetores normais às superfícies em cada ponto da curva. Sendo $f(x,y,z)=x^2+y+z-1$ e $g(x,y,z)=x^3+y^3+z^2-1$, tais vetores normais são, no ponto $P$, $\nabla f(P)=(-2,1,1)$ e $\nabla g(P)=(3,3,-2)$, que são linearmente independentes. Logo

$$\gamma'(t_0) \parallel \nabla f(P)\times\nabla g(P)=(-2,1,1)\times(3,3,-2)=(-5,-1,-9).$$

**Teste 3** [pltg1] Sejam $P_1$ e $P_2$ pontos da superfície $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon y=x^2+yz-1\}$. Sabe-se que os pontos $(0,0,-1)$ e $(-1,-1,0)$ pertencem ambos ao plano tangente a $S$ em $P_1$ e também ao plano tangente a $S$ em $P_2$. Qual das retas abaixo contém os pontos $P_1$ e $P_2$ simultaneamente?

■ $(x,y,z)=(-2,-1,4)+\lambda(-1,0,2), \lambda\in\mathbb{R}$
B $(x,y,z)=(-2,-1,4)+\lambda(-4,3,-1), \lambda\in\mathbb{R}$
C $(x,y,z)=(-2,-1,4)+\lambda(-1,1,-1), \lambda\in\mathbb{R}$.
D $(x,y,z)=(-2,-1,4)+\lambda(1,0,0), \lambda\in\mathbb{R}$.
E $(x,y,z)=(-2,-1,4)+\lambda(0,1,3), \lambda\in\mathbb{R}$.

***Solução:*** $S$ é a superfície de nível zero de $F(x,y,z)=x^2+yz-y-1$ e $\nabla F(x,y,z)=(2x,z-1,y)$. Se $P=(x_0,y_0,z_0)\in S$, o plano tangente à $S$ em $P$ tem equação

$$\pi\colon \big\langle(2x_0,z_0-1,y_0),(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\big\rangle=0.$$

Como $(0,0,-1)\in\pi$, temos $0=\big\langle(2x_0,z_0-1,y_0),(-x_0,-y_0,-1-z_0)\big\rangle=-2x_0^2-2y_0z_0$, ou seja, $\boxed{x_0^2+y_0z_0=0}$.
Além disso, $(-1,-1,0)\in\pi$, donde $0=\big\langle(2x_0,z_0-1,y_0),(-1-x_0,-1-y_0,-z_0)\big\rangle$, isto é, $\boxed{-2x_0-2x_0^2-z_0+1-2y_0z_0+y_0=0}$.
Finalmente, $(x_0,y_0,z_0)\in S$, logo $\boxed{x_0^2+y_0z_0-y_0-1=0}$.
Resolvendo o sistema com as três equações acima, temos duas soluções: $(-2,-1,4)$ e $(0,-1,0)$. A única reta que passa por esses dois pontos é: $(x,y,z)=(-2,-1,4)+\lambda(-1,0,2); \lambda\in\mathbb{R}$.

**Teste 4** [pltg2] Sejam $P_1$ e $P_2$ pontos da superfície $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon y = x^2 + yz - 1\}$. Sabe-se que os pontos $(0,0,-1)$ e $(0,-1,-4)$ pertencem ambos ao plano tangente a $S$ em $P_1$ e também ao plano tangente a $S$ em $P_2$. Qual das retas abaixo contém os pontos $P_1$ e $P_2$ simultaneamente?

■ $(x,y,z) = (-2,-1,4) + \lambda(1,0,0), \lambda \in \mathbb{R}$

B $(x,y,z) = (-2,-1,4) + \lambda(-4,3,-1), \lambda \in \mathbb{R}$

C $(x,y,z) = (-2,-1,4) + \lambda(-1,1,-1), \lambda \in \mathbb{R}$.

D $(x,y,z) = (-2,-1,4) + \lambda(1,0,2), \lambda \in \mathbb{R}$.

E $(x,y,z) = (-2,-1,4) + \lambda(0,1,3), \lambda \in \mathbb{R}$.

***Solução:*** $S$ é a superfície de nível zero de $F(x,y,z) = x^2 + yz - y - 1$ e $\nabla F(x,y,z) = (2x, z-1, y)$. Se $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$, o plano tangente à $S$ em $P$ tem equação

$$\pi \colon \big\langle (2x_0, z_0 - 1, y_0), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \big\rangle = 0.$$

Como $(0,0,-1) \in \pi$, temos $0 = \big\langle (2x_0, z_0 - 1, y_0), (-x_0, -y_0, -1 - z_0) \big\rangle = -2x_0^2 - 2y_0 z_0$, ou seja, $\boxed{x_0^2 + y_0 z_0 = 0}$.

Além disso, $(0,-1,-4) \in \pi$, donde $0 = \big\langle (2x_0, z_0 - 1, y_0), (-x_0, -1 - y_0, -4 - z_0) \big\rangle$, isto é, $\boxed{-2x_0^2 - z_0 - 2y_0 z_0 - 3y_0 + 1 = 0}$.

Finalmente, $(x_0, y_0, z_0) \in S$, logo $\boxed{x_0^2 + y_0 z_0 - y_0 - 1 = 0}$.

Resolvendo o sistema com as três equações acima, temos duas soluções: $(-2,-1,4)$ e $(0,-1,4)$.

A única reta que passa por esses dois pontos é: $(x,y,z) = (-2,-1,4) + \lambda(1,0,0); \lambda \in \mathbb{R}$.

*Para os testes 5 e 6 considere a função $f \colon \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = y\big((\ln y)^2 - x^2\big)$.*

**Teste 5** [critabA1] Considere as seguintes afirmações:

I. $f$ tem ao menos três pontos críticos;

II. $f$ tem exatamente um ponto de sela;

III. $f$ tem ao menos um ponto de mínimo local.

Está correto o que se afirma em

■ II, apenas.

B I e II, apenas.

C II e III, apenas.

D I e III, apenas.

E III, apenas.

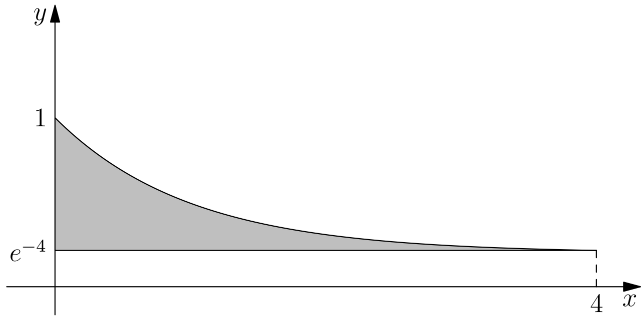
***Solução:*** Temos que $\nabla f(x,y) = \big(-2xy, (\ln y)^2 + 2\ln y - x^2\big)$. Como $y > 0$, então os pontos críticos de $f$ são $(0,1)$ e $(0, e^{-2})$.

Por outro lado, $f_{xx}(x,y) = -2y$, $f_{xy}(x,y) = -2x$ e $f_{yy}(x,y) = 2(\ln y + 1)/y$. Assim:

- $H_f(0,1) = -4$ e $(0,1)$ é um ponto de sela.
- $H_f(0, e^{-2}) = 4$ e $f_{xx}(0, e^{-2}) = -2e^{-2}$, logo $(0, e^{-2})$ é ponto de máximo local de $f$.

**Teste 6** [critabA2] A soma dos valores máximo e mínimo da função $f$ no conjunto compacto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 4, e^{-4} \le y \le e^{-x}\}$ é:

- ■ $4e^{-2}$.
- B $2e^{-4}$.
- C $16e^{-4}$.
- D $e^{-2}$.
- E $e^{-4} + e^{-2}$.




***Solução:*** Temos que $f$ não possui pontos críticos no interior de $D$. Parametrizando a fronteira de $D$:

- $\gamma_1(t) = (t, e^{-t}), 0 \le t \le 4$. Segue que $f(\gamma_1(t)) = 0$.
- $\gamma_2(t) = (t, e^{-4}), 0 \le t \le 4$. Seja $g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = e^{-4}(16 - t^2), 0 \le t \le 4$. Temos que $g_2$ é decrescente, e tem valor máximo $16e^{-4}$ e valor mínimo 0.
- $\gamma_3(t) = (0,t)$, $e^{-4} \le t \le 1$. Seja $g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = t(\ln t)^2$, $e^{-4} \le t \le 1$. Temos que $g_3'(t) = (\ln t)^2 + 2\ln t$, logo $g_3'(t) = 0$ e $t \in ]e^{-4}, 1[$ implica $t = e^{-2}$. Comparando os valores $\{g_3(e^{-4}), g_3(e^{-2}), g_3(1)\}$ temos que o valor máximo de $g_3$ em $[e^{-4}, 1]$ é $4e^{-2}$ e o valor mínimo é 0.

Portanto, o valor máximo de $f$ em $D$ é $4e^{-2}$ e o valor mínimo é 0.

*Para os testes 7 e 8 considere a função $f\colon \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = y\big(x^2 - (\ln y)^2\big)$.*

**Teste 7** [critabB1] Considere as seguintes afirmações:

I. $f$ tem ao menos três pontos críticos;

II. $f$ tem exatamente um ponto de sela;

III. $f$ tem ao menos um ponto de mínimo local.

Está correto o que se afirma em

- ■ II e III, apenas.
- B II, apenas.
- C I e II, apenas.
- D I e III, apenas.
- E III, apenas.

***Solução:*** Temos que $\nabla f(x,y) = \big(2xy, x^2 - (\ln y)^2 - 2\ln y\big)$. Como $y > 0$, então os pontos críticos de $f$ são $(0,1)$ e $(0, e^{-2})$.
Por outro lado, $f_{xx}(x,y) = 2y$, $f_{xy}(x,y) = 2x$ e $f_{yy}(x,y) = -2(\ln y + 1)/y$. Assim:

- $H_f(0,1) = -4$, logo $(0,1)$ é um ponto de sela.
- $H_f(0, e^{-2}) = 4$ e $f_{xx}(0, e^{-2}) = 2e^{-2}$, logo $(0, e^{-2})$ é ponto de mínimo local de $f$.

**Teste 8** [critabB2] A soma dos valores máximo e mínimo da função $f$ no conjunto compacto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 4, e^{-4} \leq y \leq e^{-x}\}$ é:

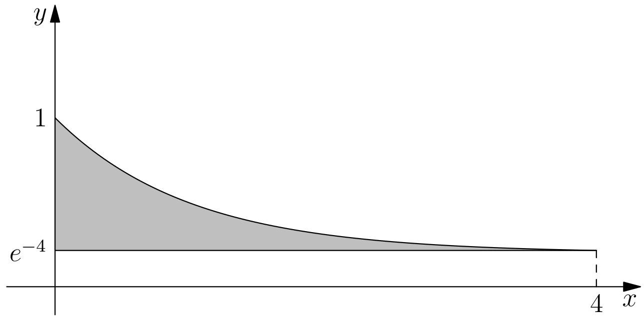
■ $-4e^{-2}$.

[B] $-2e^{-4}$.

[C] $-16e^{-4}$.

[D] $-e^{-2}$.

[E] $-e^{-4} - e^{-2}$.




***Solução:*** Temos que $f$ não possui pontos críticos no interior de $D$. Parametrizando a fronteira de $D$:

- $\gamma_1(t) = (t, e^{-t}), 0 \leq t \leq 4$. Segue que $f(\gamma_1(t)) = 0$.
- $\gamma_2(t) = (t, e^{-4}), 0 \leq t \leq 4$. Seja $g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = e^{-4}(t^2 - 16), 0 \leq t \leq 4$. Temos que $g_2$ é crescente, e tem valor máximo 0 e valor mínimo $-16e^{-4}$.
- $\gamma_3(t) = (0, t)$, $e^{-4} \leq t \leq 1$. Seja $g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = -t(\ln t)^2$, $e^{-4} \leq t \leq 1$. Temos que $g_3'(t) = (\ln t)^2 + 2\ln t$, logo $g_3'(t) = 0$ e $t \in ]e^{-4}, 1[$ implica $t = e^{-2}$. Comparando os valores $\{g_3(e^{-4}), g_3(e^{-2}), g_3(1)\}$ temos que o valor máximo de $g_3$ em $[e^{-4}, 1]$ é 0 e o valor mínimo é $-4e^{-2}$.

Portanto, o valor máximo de $f$ em $D$ é 0 e o valor mínimo é $-4e^{-2}$.

**Teste 9** [hess1] Considere a função $F(x,y) = x^2y^3$. Os pontos $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$ são pontos críticos de $F$ e são, respectivamente:

■ ponto de sela, ponto de sela e mínimo local.

[B] ponto de sela, mínimo local e ponto de sela.

[C] mínimo local, mínimo local, ponto de sela.

[D] máximo local, ponto de sela e máximo local.

[E] mínimo local, ponto de sela e máximo local.

***Solução:*** Analisando os valores de $F$ para pontos $(x,y)$ fora dos eixos coordenados, temos:

- $F(x,y) > 0$ no primeiro e no segundo quadrantes.
- $F(x,y) < 0$ no terceiro e no quarto quadrantes.
- $F(0,0) = 0$ e $(0,0)$ é ponto de sela pois toda vizinhança de $(0,0)$ contém pontos nos quais $F(x,y) > F(0,0)$ e pontos nos quais $F(x,y) < F(0,0)$.
- $F(1,0) = 0$ e $(1,0)$ é ponto de sela pois toda vizinhança de $(1,0)$ contém pontos nos quais $F(x,y) > F(1,0)$ e pontos nos quais $F(x,y) < F(1,0)$.
- $F(0,1) = 0$ e $(0,1)$ é ponto de mínimo local pois existe vizinhança aberta de $(0,1)$ na qual todos os pontos satisfazem $F(x,y) \geq F(0,1)$.

**Teste 10** [hess2] Considere a função $F(x,y) = x^3y^2$. Os pontos $(0,0)$, $(-1,0)$ e $(0,-1)$ são pontos críticos de $F$ e são, respectivamente:

■ ponto de sela, máximo local e ponto de sela.
[B] ponto de sela, ponto de sela e máximo local.
[C] mínimo local, ponto de sela e máximo local.
[D] máximo local, ponto de sela e mínimo local.
[E] mínimo local, máximo local e ponto de sela.

***Solução:*** Analisando os valores de $F$ para pontos $(x,y)$ fora dos eixos coordenados, temos:

- $F(x,y) > 0$ no primeiro e no quarto quadrantes.
- $F(x,y) < 0$ no segundo e no terceiro quadrantes.
- $F(0,0) = 0$ e $(0,0)$ é ponto de sela pois toda vizinhança de $(0,0)$ contém pontos nos quais $F(x,y) > F(0,0)$ e pontos nos quais $F(x,y) < F(0,0)$.
- $F(-1,0) = 0$ e $(-1,0)$ é ponto de máximo local pois existe vizinhança aberta de $(-1,0)$ na qual todos os pontos satisfazem $F(x,y) \leq F(-1,0)$.
- $F(0,-1) = 0$ e $(0,-1)$ é ponto de sela pois toda vizinhança de $(0,-1)$ contém pontos nos quais $F(x,y) > F(0,-1)$ e pontos nos quais $F(x,y) < F(0,-1)$.

**Teste 11** [hess3] Considere a função $F(x,y) = x^3y^2$. Os pontos $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,-1)$ são pontos críticos de $F$ e são, respectivamente:

■ ponto de sela, mínimo local e ponto de sela.
[B] ponto de sela, máximo local e ponto de sela.
[C] mínimo local, ponto de sela e máximo local.
[D] máximo local, ponto de sela e mínimo local.
[E] mínimo local, máximo local e ponto de sela.

***Solução:*** Analisando os valores de $F$ para pontos $(x,y)$ fora dos eixos coordenados, temos:

- $F(x,y) > 0$ no primeiro e no quarto quadrantes.
- $F(x,y) < 0$ no segundo e no terceiro quadrantes.
- $F(0,0) = 0$ e $(0,0)$ é ponto de sela pois toda vizinhança de $(0,0)$ contém pontos nos quais $F(x,y) > F(0,0)$ e pontos nos quais $F(x,y) < F(0,0)$.
- $F(1,0) = 0$ e $(1,0)$ é ponto de mínimo local pois existe vizinhança aberta de $(1,0)$ na qual todos os pontos satisfazem $F(x,y) \geq F(1,0)$.
- $F(0,-1) = 0$ e $(0,-1)$ é ponto de sela pois toda vizinhança de $(0,-1)$ contém pontos nos quais $F(x,y) > F(0,-1)$ e pontos nos quais $F(x,y) < F(0,-1)$.

**Teste 12** [hess4] Considere a função $F(x,y) = x^3y^2$. Os pontos $(-1,0)$, $(0,0)$ e $(1,0)$ são pontos críticos de $F$ e são, respectivamente:

■ máximo local, ponto de sela e mínimo local.
[B] ponto de sela, máximo local e ponto de sela.
[C] mínimo local, ponto de sela e máximo local.
[D] ponto de sela, ponto de sela e mínimo local.
[E] mínimo local, máximo local e ponto de sela.

***Solução:*** Analisando os valores de $F$ para pontos $(x,y)$ fora dos eixos coordenados, temos:

- $F(x,y) > 0$ no primeiro e no quarto quadrantes.
- $F(x,y) < 0$ no segundo e no terceiro quadrantes.
- $F(-1,0) = 0$ e $(-1,0)$ é ponto de máximo local pois existe vizinhança aberta de $(-1,0)$ na qual todos os pontos satisfazem $F(x,y) \leq F(-1,0)$.
- $F(0,0) = 0$ e $(0,0)$ é ponto de sela pois toda vizinhança de $(0,0)$ contém pontos nos quais $F(x,y) > F(0,0)$ e pontos nos quais $F(x,y) < F(0,0)$.
- $F(1,0) = 0$ e $(1,0)$ é ponto de mínimo local pois existe vizinhança aberta de $(1,0)$ na qual todos os pontos satisfazem $F(x,y) \geq F(1,0)$.

**Teste 13** [lgrng31r1] Dentre os pontos do elipsóide $x^2 + y^2 - xy + z^2 = 20$, seja $P = (a,b,c)$ aquele cuja soma das coordenadas é máxima. Então vale:

■ $a+b+c = 10$.
[B] $a+b+c = 9$.
[C] $a+b+c = 14$.
[D] $a+b+c = 15$.
[E] $a+b+c = 16$.

***Solução:*** Queremos maximizar a função $f(x,y,z) = x+y+z$, sujeito a $g^{-1}(0)$, onde $g(x,y,z) = x^2+y^2-xy+z^2-20$. Em tal ponto $P$ de máximo devemos ter $\{\nabla f(P), \nabla g(P)\}$ é linearmente dependente, isto é, $\nabla f(P) \wedge \nabla g(P) = (0,0,0)$, o que resulta no sistema:

$$\begin{cases} 2z - 2y + x &= 0 \\ 2x - y - 2z &= 0 \\ 3y - 3x &= 0 \\ x^2+y^2-xy+z^2 &= 20 \end{cases},$$

cujas soluções são $(4,4,2)$ e $(-4,-4,-2)$. Portanto, $P = (4,4,2)$ e $a+b+c = 10$.

**Teste 14** [lgrng31r2] Dentre os pontos do elipsóide $x^2 + y^2 - xy + z^2 = 45$, seja $P = (a, b, c)$ aquele cuja soma das coordenadas é máxima. Então vale:

■ $a + b + c = 15$.
[B] $a + b + c = 9$.
[C] $a + b + c = 14$.
[D] $a + b + c = 10$.
[E] $a + b + c = 16$.

***Solução:*** Queremos maximizar a função $f(x, y, z) = x + y + z$, sujeito a $g^{-1}(45)$, onde $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - xy + z^2$. Em tal ponto $P$ de máximo devemos ter $\{\nabla f(P), \nabla g(P)\}$ é linearmente dependente, isto é, $\nabla f(P) \wedge \nabla g(P) = (0, 0, 0)$, o que resulta no sistema:

$$\begin{cases} 2z - 2y + x &= 0 \\ 2x - y - 2z &= 0 \\ 3y - 3x &= 0 \\ x^2 + y^2 - xy + z^2 &= 20 \end{cases},$$

cujas soluções são $(6, 6, 3)$ e $(-6, -6, -3)$. Portanto, $P = (6, 6, 3)$ e $a + b + c = 15$.

*Para os testes 15 e 16 considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = (y^2 - 1)e^{-x^2}$.*

**Teste 15** [minmaxdiscoA1] O valor máximo de $f$ na circunferência $x^2 + y^2 = 4$ é :

■ 3.
[B] 7.
[C] 5.
[D] 9.
[E] 8.

***Solução:*** Há várias maneiras de resolver este exercício. Vamos usar substituição e cair num problema de cálculo 1. Substituido $y^2$ por $4 - x^2$, devemos achar o valor máximo da função $g(x) = (3 - x^2)e^{-x^2}$ para $x \in [-2, 2]$. Como $g'(x) = -2x(4 - x^2)e^{-x^2}$, os candidatos a ponto de máximo e mínimo são: $x = 0, x = 2$ e $x = -2$. Calculando os valores de $g$ nesses pontos temos

$$g(0) = 3 \quad \text{e} \quad g(2) = g(-2) = -e^{-4}.$$

O valor máximo é 3.
Outra maneira seria utilizar o método de Lagrange para funções com duas variáveis e uma restrição.

**Teste 16** [minmaxdiscoA2] Seja $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 4\}$ e sejam $m$ e $M$ os valores mínimo e máximo de $f$ em $C$, respectivamente. Assinale a alternativa correta.

■ $m + M = 2$.
[B] $m + M = 3$.
[C] $m + M = 3 - e^{-4}$.
[D] $m + M = 4 - e^{-4}$.
[E] $m + M = -e^{-4}$.

***Solução:*** Pelo que foi feito no exercício anterior, sabemos o valor máximo e mínimo de $F$ na circunferência $x^2 + y^2 = 4$: 3 e $-e^{-4}$. Resta analisar no aberto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 4\}$. Para isso, basta estudar os pontos críticos de $F$ ali. Neste caso temos

$$\nabla F(x,y) = \big(-2x(y^2-1)e^{-x^2}, 2ye^{-x^2}\big)$$

e o único ponto crítico de $F$ é $(0,0)$. Como $F(0,0) = -1$ e $-1 < -e^{-4}$, o valor mínimo é $-1$. Ou seja, $m = -1$, $M = 3$ e a resposta correta é $m + M = 2$.

*Para os testes 17 e 18 considere a função $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = (y^2-1)e^{-x^2}$.*

**Teste 17** [minmaxdiscoB1] O valor máximo de $f$ na circunferência $x^2 + y^2 = 9$ é :

■ 8.
[B] 3.
[C] 5.
[D] 7.
[E] 9.

***Solução:*** Há várias maneiras de resolver este exercício. Vamos usar substituição e cair num problema de cálculo 1. Substituido $y^2$ por $9 - x^2$, devemos achar o valor máximo da função $g(x) = (8 - x^2)e^{-x^2}$ para $x \in [-3,3]$. Como $g'(x) = -2x(9-x^2)e^{-x^2}$, os candidatos a ponto de máximo e mínimo são: $x = 0$, $x = 3$ e $x = -3$. Calculando os valores de $g$ nesses pontos temos

$$g(0) = 8 \quad \text{e} \quad g(3) = g(-3) = -e^{-9}.$$

O valor máximo é 8.
Outra maneira seria utilizar o método de Lagrange para funções com duas variáveis e uma restrição.

**Teste 18** [minmaxdiscoB2] Seja $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 9\}$ e sejam $m$ e $M$ os valores mínimo e máximo de $f$ em $C$, respectivamente. Assinale a alternativa correta.

■ $m + M = 7$.

[B] $m + M = 3$.

[C] $m + M = 9 - e^{-9}$.

[D] $m + M = 3 - e^{-9}$.

[E] $m + M = -e^{-9}$.

***Solução:*** Pelo que foi feito no exercício anterior, sabemos o valor máximo e mínimo de $F$ na circunferência $x^2 + y^2 = 9$: 8 e $-e^{-9}$. Resta analisar no aberto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 9\}$. Para isso, basta estudar os pontos críticos de $F$ ali. Neste caso temos

$$\nabla F(x,y) = \big(-2x(y^2-1)e^{-x^2}, 2ye^{-x^2}\big)$$

e o único ponto crítico de $F$ é $(0,0)$. Como $F(0,0) = -1$ e $-1 < -e^{-9}$, o valor mínimo é $-1$. Ou seja, $m = -1$, $M = 8$ e a resposta correta é $m + M = 7$.

**Teste 19** [teor1] Seja $g \colon I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo aberto $I$. Seja ainda $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável. Suponha que $f\big(x, g(x)\big) = 0$ para todo $x \in I$. Considere as seguintes afirmações:

I. Se $\big(x_0, g(x_0)\big)$ é um ponto crítico de $f$ então $g'(x_0) = 0$.

II. Se $x_0$ é ponto de máximo local de $g$ então $\dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x_0, g(x_0)\big) = 0$.

III. Se $\big(x_0, g(x_0)\big)$ é ponto de mínimo local de $f$ então $x_0$ é ponto de mínimo local de $g$.

É sempre correto o que se afirma em

■ II, apenas.

[B] I, II e III.

[C] I e III, apenas.

[D] I e II, apenas.

[E] III, apenas.

***Solução:*** Sendo $f$ diferenciável e $g$ derivável, segue de $f(x, g(x)) = 0$, usando regra da cadeia, que $f_x\big(x, g(x)\big) + g'(x) f_y\big(x, g(x)\big) = 0$, para todo $x \in I$. Se $x_0$ é ponto de máximo local de $g$ então $g'(x_0) = 0$, e portanto $f_x\big(x_0, g(x_0)\big) = 0$.
As afirmações I e III são falsas: por exemplo, considerando $f(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $g(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ no ponto $x_0 = 0$.

**Teste 20** `[teor2]` Seja $g\colon I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo aberto $I$. Seja ainda $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável. Suponha que $f\big(g(y), y\big) = 0$ para todo $x \in I$. Considere as seguintes afirmações:

I. Se $\big(g(y_0), y_0)\big)$ é um ponto crítico de $f$ então $g'(y_0) = 0$.

II. Se $\big(g(y_0), y_0\big)$ é ponto de máximo local de $f$ então $y_0$ é ponto de máximo local de $g$.

III. Se $y_0$ é ponto de mínimo local de $g$ então $\dfrac{\partial f}{\partial y}\big(g(y_0), y_0\big) = 0$.

É sempre correto o que se afirma em

■ III, apenas.

[B] I, II e III.

[C] I e III, apenas.

[D] I e II, apenas.

[E] II, apenas.

***Solução:*** Sendo $f$ diferenciável e g derivável, segue de $f(g(y), y) = 0$, usando regra da cadeia, que $g'(y)f_x(g(y), y) + f_y(g(y), y) = 0$, para todo $y \in I$. Se $y_0$ é ponto de mínimo local de $g$ então $g'(y_0) = 0$, e portanto $f_y(g(y_0), y_0) = 0$.
As afirmações I e III são falsas: por exemplo, considerando $f(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $g(y) = y$ para todo $y \in \mathbb{R}$ no ponto $y_0 = 0$.

**Teste 21** [lgrng32r1] Considere o ponto $P = (a, b, c)$ pertencente à intersecção das superfícies $z^2 = x^2 + y^2$ e $x - 2z = 3$ que está mais próximo da origem. Assinale a alternativa correta.

■ $a + b + c = 0$.

[B] $a + b + c = -6$.

[C] $a + b + c = 2$.

[D] $a + b + c = 3$.

[E] $a + b + c = -4$.

***Solução:*** $P$ é o ponto de mínimo da função $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeita às retrições $G_1(x, y, z) = 0$ e $G_2(x, y, z) = 0$, onde

$$G_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 \quad \text{e} \quad G_2(x, y, z) = x - 2z - 3.$$

Calculando os gradientes, obtemos:

$$\nabla G_1(x, y, z) = (2x, 2y, -2z), \quad \nabla G_2(x, y, z) = (1, 0, -2) \quad \text{e} \quad \nabla F(x, y, z) = (2x, 2y, 2z).$$

O teorema de Lagrange diz que os candidatos a ponto de mínimo procurado são os pontos $(x, y, z)$, soluções do sistema:

$$\begin{cases} \{\nabla F(x,y,z), \nabla G_1(x,y,z), \nabla G_1(x,y,z)\} & \text{é L.D.} \\ \hfill G_1(x,y,z) = & 0 \\ \hfill G_2(x,y,z) = & 0 \end{cases}.$$

Os três vetores acima são L.D. se e somente se

$$0 = \det \begin{bmatrix} x & y & z \\ x & y & -z \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = -2yz.$$

Algebricamente o sistema escreve-se

$$\begin{cases} yz & = 0 \\ z^2 - x^2 - y^2 & = 0 \\ x - 2z - 3 & = 0 \end{cases},$$

cujas soluções são $(x, y, z) = (-3, 0, -3)$ e $(x, y, z) = (1, 0, -1)$. Testando os dois candidatos, temos $F(-3, 0, -3) = 18$ e $F(1, 0, -1) = 2$. Logo, $P = (1, 0, -1)$ e $a + b + c = 0$ é a resposta correta.

**Teste 22** [lgrng32r2] Considere o ponto $P = (a, b, c)$ pertencente à intersecção das superfícies $z^2 = x^2 + y^2$ e $x - 2z = 3$ que está mais distante da origem. Assinale a alternativa correta.

■ $a + b + c = -6$.

B $a + b + c = 0$.

C $a + b + c = 2$.

D $a + b + c = 3$.

E $a + b + c = -4$.

***Solução:*** $P$ é o ponto de máximo da função $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeita às retrições $G_1(x, y, z) = 0$ e $G_2(x, y, z) = 0$, onde

$$G_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 \quad \text{e} \quad G_2(x, y, z) = x - 2z - 3.$$

Calculando os gradientes, obtemos:

$$\nabla G_1(x, y, z) = (2x, 2y, -2z), \quad \nabla G_2(x, y, z) = (1, 0, -2) \quad \text{e} \quad \nabla F(x, y, z) = (2x, 2y, 2z).$$

O teorema de Lagrange diz que os candidatos a ponto de máximo procurado são os pontos $(x, y, z)$, soluções do sistema:

$$\begin{cases} \{\nabla F(x, y, z), \nabla G_1(x, y, z), \nabla G_1(x, y, z)\} & \text{é L.D.} \\ G_1(x, y, z) = & 0 \\ G_2(x, y, z) = & 0 \end{cases}.$$

Os três vetores acima são L.D. se e somente se

$$0 = \det \begin{bmatrix} x & y & z \\ x & y & -z \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = -2yz = 0.$$

Algebricamente o sistema escreve-se

$$\begin{cases} yz & = 0 \\ z^2 - x^2 - y^2 & = 0 \\ x - 2z - 3 & = 0 \end{cases},$$

cujas soluções são $(x, y, z) = (-3, 0, -3)$ e $(x, y, z) = (1, 0, -1)$. Testando os dois candidatos, temos $F(-3, 0, -3) = 18$ e $F(1, 0, -1) = 2$. Logo, $P = (-3, 0, -3)$ e $a + b + c = -6$ é a resposta correta.

## 25/11/2019— MAT–2454 — Terceira Prova— Folha de Respostas

*Respostas ilegíveis ou não indicadas nesta folha serão desconsideradas.*

### Identificação:

**Nome:** ______________________________ **NUSP:** ______________

______________________________________
Assinatura

Por favor coloque seu número USP nos campos abaixo, deixando as **primeiras colunas** em branco caso ele tenha menos de 8 dígitos.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |

### Respostas:

**Teste 1:** ■ B C D E
**Teste 2:** ■ B C D E
**Teste 3:** ■ B C D E
**Teste 4:** ■ B C D E
**Teste 5:** ■ B C D E
**Teste 6:** ■ B C D E
**Teste 7:** ■ B C D E
**Teste 8:** ■ B C D E
**Teste 9:** ■ B C D E
**Teste 10:** ■ B C D E
**Teste 11:** ■ B C D E
**Teste 12:** ■ B C D E
**Teste 13:** ■ B C D E
**Teste 14:** ■ B C D E
**Teste 15:** ■ B C D E
**Teste 16:** ■ B C D E
**Teste 17:** ■ B C D E
**Teste 18:** ■ B C D E

**Teste 19:** ■ B C D E

**Teste 20:** ■ B C D E

**Teste 21:** ■ B C D E

**Teste 22:** ■ B C D E