CATALOG

MAT–2453 — Cálculo Diferencial e Integral I — EP–USP

Segunda Prova — 13/05/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________________ **NUSP:** ___________ **Turma:** ___________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h30min.
4. As questões dissertativas podem ser feitas a tinta (azul ou preta) ou a lápis.
5. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho. Só será considerado na correção das questões dissertativas o que estiver na folha com seu enunciado.
6. Mantenha a organização, limpeza e legibilidade na redação das questões dissertativas, **justificando todas as suas afirmações**.
7. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
8. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, que devem ser evitados, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
9. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
10. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________________

BOA PROVA!

Teste 1 [afirms1] Assinale a alternativa cuja afirmação é verdadeira.

■ Se $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ é uma função derivável tal que f não possui pontos críticos, então f não possui extremos globais.

[B] Se $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ é uma função qualquer tal que $f(1)f(-1) < 0$, então existe $c \in]-1,1[$ tal que $f(c) = 0$.

[C] Se $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que f é derivável em $]-1,1[$ e $f(1) = f(-1) + 1$, então existe $c \in]-1,1[$ tal que $f'(c) = 1$.

[D] Se $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ é uma função derivável e $c \in]-1,1[$ é o único ponto crítico de f, então c é extremo global de f.

[E] Se $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ é uma função derivável tal que $f(0) = 1$ e $f'(x) > 0$ para todo $x \in]-1,1[$, então $f(x) > 0$ para todo $x \in]-1,1[$.

Solução: A) Verdadeira. Se existisse $c \in]-1,1[$ ponto de extremo global de f então c seria ponto de extremo local de f, já que $]-1,1[$ é intervalo aberto. Como f é derivável, teríamos $f'(c) = 0$, isto é, c seria ponto crítico.

B) Falsa. Por exemplo $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \le x \le 1; \\ -1, \text{ se } -1 \le x < 0. \end{cases}$

C) Falsa. Por exemplo, $f(x) = \frac{1}{2}x$.
D) Falsa. Por exemplo, $f(x) = x^3$.
E) Falsa. Por exemplo, $f(x) = 2x + 1$.

Teste 2 [afirms2] Assinale a alternativa cuja afirmação é verdadeira.

■ Se $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ é uma função derivável, com derivada contínua, $c \in]-1,1[$ é o único ponto crítico de f e c é ponto de mínimo local de f então c é ponto de mínimo global de f.

[B] Se $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ é uma função derivável, com derivada contínua, tal que f possui pontos críticos, então f possui extremos locais.

[C] Se $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ é uma função qualquer tal que $f(1)f(-1) < 0$, então existe $c \in]-1,1[$ tal que $f(c) = 0$.

[D] Se $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que f é derivável em $]-1,1[$ e $f(1) = f(-1) + 1$, então existe $c \in]-1,1[$ tal que $f'(c) = 1$.

[E] Se $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ é uma função derivável tal que $f(0) = 1$ e $f'(x) > 0$ para todo $x \in]-1,1[$, então $f(x) > 0$ para todo $x \in]-1,1[$.

Solução: A) Verdadeira. Observe que $f'(x) < 0$, se $x < c$ e $f'(x) > 0$, se $x > c$. (De fato, se existisse $b \in]-1,c[$ com $f'(b) > 0$ então, pelo TVI, existiria $d \in]b,c[$ tal que $f'(d) = 0$, isto é, existiria outro ponto crítico de f em $]-1,1[$. Analogamente para $]c,1[$.) Assim, f é estritamente decrescente em $]-1,c]$ e estritamente crescente em $[c,1[$. Portanto, c é ponto de mínimo global de f.
B) Falsa. Por exemplo, $f(x) = x^3$.

C) Falsa. Por exemplo $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \le x \le 1; \\ -1, \text{ se } -1 \le x < 0. \end{cases}$

D) Falsa. Por exemplo, $f(x) = \frac{1}{2}x$.
E) Falsa. Por exemplo, $f(x) = 2x + 1$.

Teste 3 [cones1] Considere os cones circulares retos inscritos numa esfera de raio 6 cujas alturas variam no intervalo $[6, 10]$. Entre esses cones, sejam C_1 o de maior volume e C_2 o de menor volume. Então a razão entre o volume de C_1 e o volume de C_2 é

■ $\frac{32}{25}$.

B $\frac{32}{27}$.

C $\frac{27}{25}$.

D $\frac{9}{8}$.

E $\frac{256}{243}$.

Solução: Temos $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, em que $r^2 + (h-6)^2 = 36$, isto é, $r^2 = 12h - h^2$. Queremos, então, o máximo e mínimo de $V(h) = \frac{1}{3}\pi(12h^2 - h^3)$ em $[6, 10]$. Observe que $V(h)$ é contínua em $[6, 10]$. Pelo Teorema de Weierstrass, V possui máximo e mínimo globais. Além disso, f é derivável em $]6, 10[$. Os candidatos a extremo são $h = 6$, $h = 10$ e os pontos críticos de V em $]6, 10[$. Como $V'(h) = \frac{1}{3}\pi 3h(8-h)$, o único ponto crítico no intervalo considerado é $h = 8$. Temos $V(6) = 216$, $V(8) = 256$ (máximo) e $V(10) = 200$ (mínimo). Assim, a resposta correta é $\frac{32}{25}$.

Teste 4 [cones2] Considere os cones circulares retos inscritos numa esfera de raio 6 cujas alturas variam no intervalo $[6, 9]$. Entre esses cones, sejam C_1 o de maior volume e C_2 o de menor volume. Então a razão entre o volume de C_1 e o volume de C_2 é

■ $\frac{32}{27}$.

B $\frac{32}{25}$.

C $\frac{27}{25}$.

D $\frac{9}{8}$.

E $\frac{256}{243}$.

Solução: Temos $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, em que $r^2 + (h-6)^2 = 36$, isto é, $r^2 = 12h - h^2$. Queremos, então, o máximo e mínimo de $V(h) = \frac{1}{3}\pi(12h^2 - h^3)$ em $[6, 9]$. Observe que $V(h)$ é contínua em $[6, 9]$. Pelo Teorema de Weierstrass, V possui máximo e mínimo globais. Além disso, f é derivável em $]6, 10[$. Os candidatos a extremo são $h = 6$, $h = 9$ e os pontos críticos de V em $]6, 10[$. Como $V'(h) = \frac{1}{3}\pi 3h(8-h)$, o único ponto crítico no intervalo considerado é $h = 8$. Temos $V(6) = 216$ (mínimo), $V(8) = 256$ (máximo) e $V(9) = 243$. Assim, a resposta correta é $\frac{32}{27}$.

Teste 5 [cones3] Considere os cones circulares retos inscritos numa esfera de raio 6 cujas alturas variam no intervalo $[6, 10]$. Entre esses cones, sejam C_1 o de menor volume e C_2 o de maior volume. Então a razão entre o volume de C_1 e o volume de C_2 é

■ $\frac{25}{32}$.

B $\frac{27}{32}$.

C $\frac{25}{27}$.

D $\frac{8}{9}$.

E $\frac{243}{256}$.

Solução: Temos $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, em que $r^2 + (h-6)^2 = 36$, isto é, $r^2 = 12h - h^2$. Queremos, então, o máximo e mínimo de $V(h) = \frac{1}{3}\pi(12h^2 - h^3)$ em $[6, 10]$. Observe que $V(h)$ é contínua em $[6, 10]$. Pelo Teorema de Weierstrass, V possui máximo e mínimo globais. Além disso, f é derivável em $]6, 10[$. Os candidatos a extremo são $h = 6$, $h = 10$ e os pontos críticos de V em $]6, 10[$. Como $V'(h) = \frac{1}{3}\pi 3h(8-h)$, o único ponto crítico no intervalo considerado é $h = 8$. Temos $V(6) = 216$, $V(8) = 256$ (máximo) e $V(10) = 200$ (mínimo). Assim, a resposta correta é $\frac{25}{32}$.

Teste 6 [cones4] Considere os cones circulares retos inscritos numa esfera de raio 6 cujas alturas variam no intervalo $[6, 9]$. Entre esses cones, sejam C_1 o de menor volume e C_2 o de maior volume. Então a razão entre o volume de C_1 e o volume de C_2 é

■ $\frac{27}{32}$.

B $\frac{25}{32}$.

C $\frac{25}{27}$.

D $\frac{8}{9}$.

E $\frac{243}{256}$.

Solução: Temos $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, em que $r^2 + (h-6)^2 = 36$, isto é, $r^2 = 12h - h^2$. Queremos, então, o máximo e mínimo de $V(h) = \frac{1}{3}\pi(12h^2 - h^3)$ em $[6, 9]$. Observe que $V(h)$ é contínua em $[6, 9]$. Pelo Teorema de Weierstrass, V possui máximo e mínimo globais. Além disso, f é derivável em $]6, 10[$. Os candidatos a extremo são $h = 6$, $h = 9$ e os pontos críticos de V em $]6, 10[$. Como $V'(h) = \frac{1}{3}\pi 3h(8-h)$, o único ponto crítico no intervalo considerado é $h = 8$. Temos $V(6) = 216$ (mínimo), $V(8) = 256$ (máximo) e $V(9) = 243$. Assim, a resposta correta é $\frac{27}{32}$.

Para os testes 7, 8, 9 e 10 considere a função $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = x + 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

Teste 7 [`grafa1`] É correto afirmar que f é estritamente decrescente em

■ $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

B $\left]1, \frac{3}{2}\right[$.

C $\left]\frac{3}{2}, 2\right[$.

D $\left]-1, -\frac{1}{2}\right[$.

E $\left]3, \frac{7}{2}\right[$.

Solução: Temos $f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x^3}$. Assim, f é estritamente crescente em $]-\infty, 0[$ e em $[1, +\infty[$ e estritamente decrescente em $]0, 1]$.

Teste 8 [`grafa2`] É correto afirmar que f tem concavidade para baixo em

■ $\left]\frac{7}{2}, 4\right[$.

B $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$.

C $\left]2, \frac{5}{2}\right[$.

D $\left]\frac{3}{2}, 2\right[$.

E $\left]-\frac{3}{2}, -1\right[$.

Solução: Temos $f''(x) = \frac{-2x+6}{x^4}$. Assim, f tem concavidade para cima em $]-\infty, 0[$ e em $]0, 3]$ e tem concavidade para baixo em $[3, +\infty[$.

Teste 9 [`grafa3`] É correto afirmar que

■ a assíntota de f quando $x \to +\infty$ intercepta o eixo x no ponto $x = -1$.

B a assíntota de f quando $x \to +\infty$ intercepta o eixo x no ponto $x = 0$.

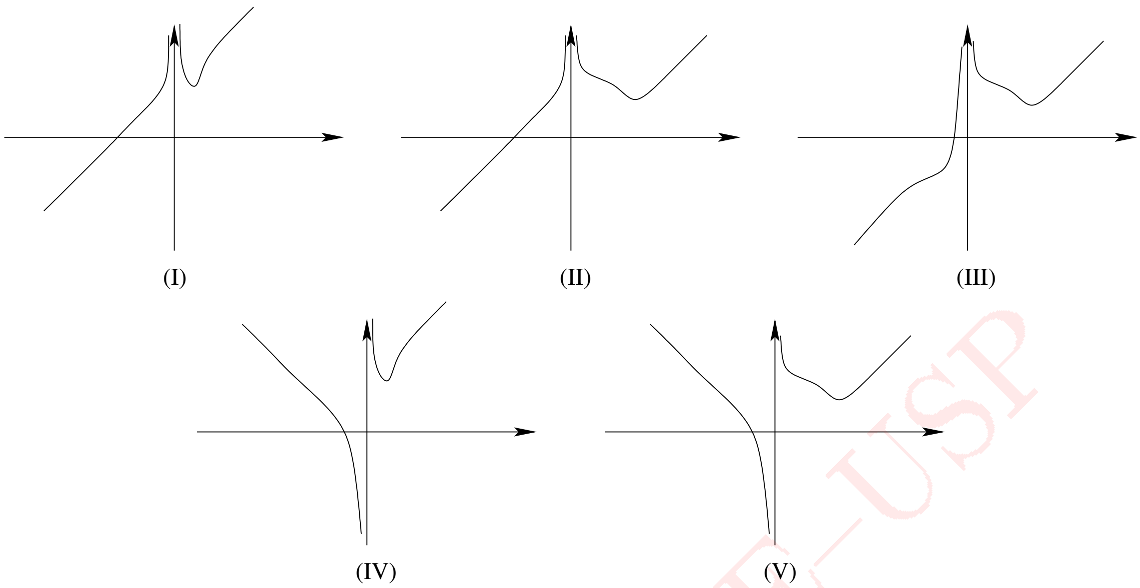
C a assíntota de f quando $x \to +\infty$ intercepta o eixo x no ponto $x = 1$.

D f não tem assíntota quando $x \to +\infty$.

E a assíntota de f quando $x \to +\infty$ intercepta o eixo x no ponto $x = -2$.

Solução: A reta $y = x + 1$ é assíntota para f, para $x \to \infty$, pois $\lim_{x\to\infty} f(x) - (x+1) = 0$.

Teste 10 [`grafa4`] Assinale a alternativa cujo gráfico mais se assemelha ao gráfico de f.



■ (I) $\quad$ B (II) $\quad$ C (III) $\quad$ D (IV) $\quad$ E (V)

Solução: O gráfico é obtido a partir das 3 questões anteriores e do fato que $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Para os testes 11, 12, 13 e 14 considere a função $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = -x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

Teste 11 [`grafb1`] É correto afirmar que f é estritamente crescente em

■ $\left]-1, -\frac{1}{2}\right[$.

B $\left]-\frac{3}{2}, -1\right[$.

C $\left]-2, -\frac{3}{2}\right[$.

D $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

E $\left]-\frac{7}{2}, -3\right[$.

Solução: Temos $f'(x) = \frac{(x+1)(-x^2+x-2)}{x^3}$. Assim, f é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$ e em $]0, +\infty[$ e estritamente crescente em $[-1, 0[$.

Teste 12 [grafb2] É correto afirmar que f tem concavidade para baixo em

■ $\left]-4,-\frac{7}{2}\right[$.

B $\left]0,\frac{1}{2}\right[$.

C $\left]-\frac{5}{2},-2\right[$.

D $\left]-2,-\frac{3}{2}\right[$.

E $\left]1,\frac{3}{2}\right[$.

Solução: Temos $f''(x) = \frac{2x+6}{x^4}$. Assim, f tem concavidade para cima em $[-3,0[$ e em $]0,+\infty[$ e tem concavidade para baixo em $]-\infty,-3]$.

Teste 13 [grafb3] É correto afirmar que

■ a assíntota de f quando $x \to +\infty$ intercepta o eixo x no ponto $x = 1$.

B a assíntota de f quando $x \to +\infty$ intercepta o eixo x no ponto $x = 0$.

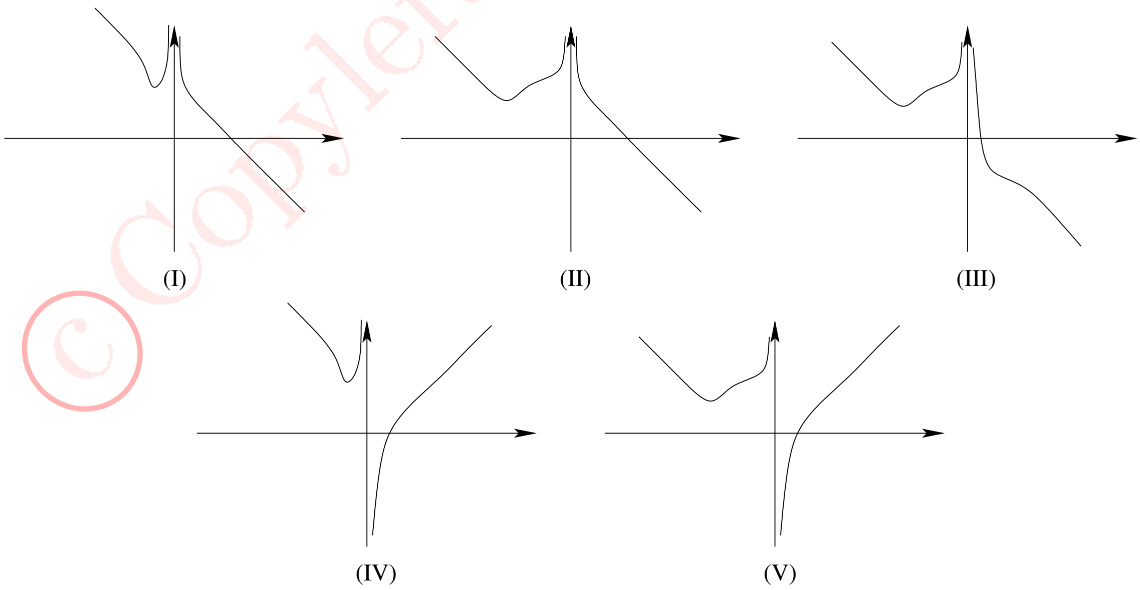
C a assíntota de f quando $x \to +\infty$ intercepta o eixo x no ponto $x = -1$.

D f não tem assíntota quando $x \to +\infty$.

E a assíntota de f quando $x \to +\infty$ intercepta o eixo x no ponto $x = 2$.

Solução: A reta $y = -x + 1$ é assíntota para f, para $x \to \infty$, pois $\lim_{x\to\infty} f(x) - (-x+1) = 0$.

Teste 14 [grafb4] Assinale a alternativa cujo gráfico mais se assemelha ao gráfico de f.



■ (I) B (II) C (III) D (IV) E (V)

Solução: O gráfico é obtido a partir das 3 questões anteriores e do fato que $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Para os testes 15, 16, 17 e 18 considere a função $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = -x - 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

Teste 15 [`grafc1`] É correto afirmar que f é estritamente crescente em

■ $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

$\boxed{\text{B}}$ $\left]1, \frac{3}{2}\right[$.

$\boxed{\text{C}}$ $\left]\frac{3}{2}, 2\right[$.

$\boxed{\text{D}}$ $\left]-1, -\frac{1}{2}\right[$.

$\boxed{\text{E}}$ $\left]3, \frac{7}{2}\right[$.

Solução: $f'(x) = \frac{(x-1)(-x^2-x-2)}{x^3}$. Assim, f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $[1, +\infty[$ e estritamente crescente em $]0, 1]$.

Teste 16 [`grafc2`] É correto afirmar que f tem concavidade para cima em

■ $\left]3, \frac{7}{2}\right[$.

$\boxed{\text{B}}$ $\left]\frac{5}{2}, 3\right[$.

$\boxed{\text{C}}$ $\left]-\frac{5}{2}, -2\right[$.

$\boxed{\text{D}}$ $\left]-2, -\frac{3}{2}\right[$.

$\boxed{\text{E}}$ $\left]1, \frac{3}{2}\right[$.

Solução: Temos $f''(x) = \frac{2x-6}{x^4}$. Assim, f tem concavidade para baixo em $]-\infty, 0[$ e em $]0, 3]$ e tem concavidade para cima em $[3, +\infty[$.

Teste 17 [`grafc3`] É correto afirmar que

■ a assíntota de f quando $x \to +\infty$ intercepta o eixo x no ponto $x = -1$.

$\boxed{\text{B}}$ a assíntota de f quando $x \to +\infty$ intercepta o eixo x no ponto $x = 0$.

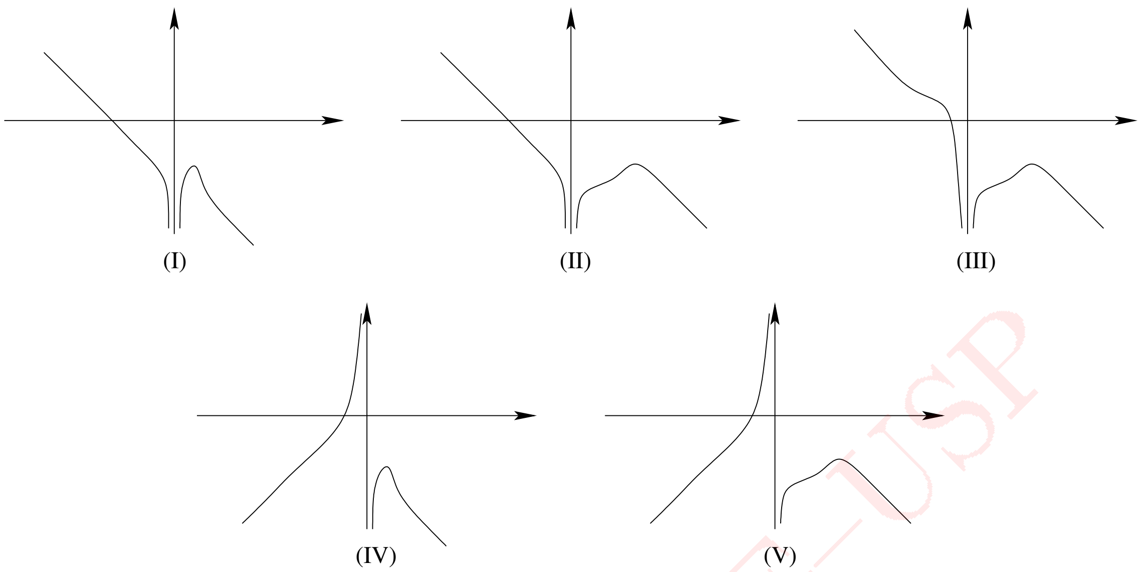
$\boxed{\text{C}}$ a assíntota de f quando $x \to +\infty$ intercepta o eixo x no ponto $x = 1$.

$\boxed{\text{D}}$ f não tem assíntota quando $x \to +\infty$.

$\boxed{\text{E}}$ a assíntota de f quando $x \to +\infty$ intercepta o eixo x no ponto $x = -2$.

Solução: A reta $y = -x - 1$ é assíntota para f, para $x \to \infty$, pois $\lim_{x\to\infty} f(x) - (-x-1) = 0$.

Teste 18 [`grafc4`] Assinale a alternativa cujo gráfico mais se assemelha ao gráfico de f.



■ (I) B (II) C (III) D (IV) E (V)

Solução: O gráfico é obtido a partir das 3 questões anteriores e do fato que $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

Para os testes 19, 20, 21 e 22 considere a função $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = x - 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

Teste 19 [`grafd1`] É correto afirmar que f é estritamente decrescente em

■ $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$.

B $\left]-\frac{3}{2}, -1\right[$.

C $\left]-2, -\frac{3}{2}\right[$.

D $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

E $\left]-\frac{7}{2}, -3\right[$.

Solução: Temos $f'(x) = \frac{(x+1)(x^2-x+2)}{x^3}$. Assim, f é estritamente crescente em $]-\infty, -1]$ e em $]0, +\infty[$ e estritamente decrescente em $[-1, 0[$.

Teste 20 [grafd2] É correto afirmar que f tem concavidade para cima em

■ $\left]-\frac{7}{2},-3\right[$.
B $\left]-3,-\frac{5}{2}\right[$.
C $\left]2,\frac{5}{2}\right[$.
D $\left]\frac{3}{2},2\right[$.
E $\left]-\frac{3}{2},-1\right[$.

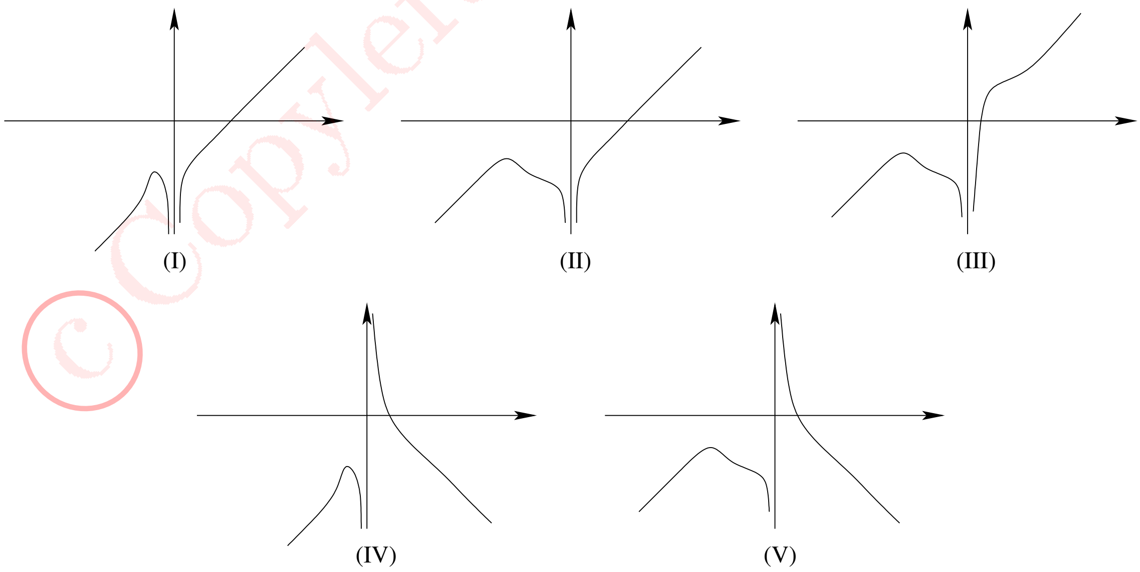
Solução: Temos $f''(x) = \frac{-2x-6}{x^4}$. Assim, f tem concavidade para baixo em $[-3,0[$ e em $]0,+\infty[$ e tem concavidade para cima em $]-\infty,-3]$.

Teste 21 [grafd3] É correto afirmar que

■ a assíntota de f quando $x \to +\infty$ intercepta o eixo x no ponto $x = 1$.
B a assíntota de f quando $x \to +\infty$ intercepta o eixo x no ponto $x = 0$.
C a assíntota de f quando $x \to +\infty$ intercepta o eixo x no ponto $x = -1$.
D f não tem assíntota quando $x \to +\infty$.
E a assíntota de f quando $x \to +\infty$ intercepta o eixo x no ponto $x = 2$.

Solução: A reta $y = x - 1$ é assíntota para f, para $x \to \infty$, pois $\lim_{x\to\infty} f(x) - (x-1) = 0$.

Teste 22 [grafd4] Assinale a alternativa cujo gráfico mais se assemelha ao gráfico de f.



■ (I) B (II) C (III) D (IV) E (V)

Solução: O gráfico é obtido a partir das 3 questões anteriores e do fato que $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

Teste 23 [limite1] O valor de $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x^2)^{\frac{1}{\sin^2(3x)}}$ é

■ $e^{-\frac{2}{9}}$.
[B] $e^{-\frac{3}{4}}$.
[C] $e^{-\frac{4}{9}}$.
[D] $e^{-\frac{9}{4}}$.
[E] $e^{-\frac{1}{9}}$.

Solução: Note que $(1-2x^2)^{\frac{1}{\sin^2(3x)}} = e^{\frac{\ln(1-2x^2)}{\sin^2(3x)}}$. Usando a regra de L'Hospital, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x^2)}{\sin^2(3x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-2x}{(1-2x^2)\sin(3x)\cos(3x)3}$. Multiplicando o numerador e o denominador por 3 e usando o limite fundamental em $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin(3x)} = 1$, obtemos que o limite acima vale $-\frac{2}{9}$.

Teste 24 [limite2] O valor de $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x^2)^{\frac{1}{\sin^2(2x)}}$ é

■ $e^{-\frac{3}{4}}$.
[B] $e^{-\frac{2}{9}}$.
[C] $e^{-\frac{4}{9}}$.
[D] $e^{-\frac{9}{4}}$.
[E] $e^{-\frac{1}{9}}$.

Solução: Note que $(1-3x^2)^{\frac{1}{\sin^2(2x)}} = e^{\frac{\ln(1-3x^2)}{\sin^2(2x)}}$. Usando a regra de L'Hospital, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x^2)}{\sin^2(2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-3x}{(1-3x^2)\sin(2x)\cos(2x)2}$. Multiplicando o numerador e o denominador por 2 e usando o limite fundamental em $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin(2x)} = 1$, obtemos que o limite acima vale $-\frac{3}{4}$.

Teste 25 [limite3] O valor de $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x^2)^{\frac{1}{\sin^2(3x)}}$ é

■ $e^{-\frac{4}{9}}$.
[B] $e^{-\frac{3}{4}}$.
[C] $e^{-\frac{2}{9}}$.
[D] $e^{-\frac{9}{4}}$.
[E] $e^{-\frac{1}{9}}$.

Solução: Note que $(1-4x^2)^{\frac{1}{\sin^2(3x)}} = e^{\frac{\ln(1-4x^2)}{\sin^2(3x)}}$. Usando a regra de L'Hospital, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-4x^2)}{\sin^2(3x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-4x}{(1-4x^2)\sin(3x)\cos(3x)3}$. Multiplicando o numerador e o denominador por 3 e usando o limite fundamental em $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin(3x)} = 1$, obtemos que o limite acima vale $-\frac{4}{9}$.

Teste 26 [limite4] O valor de $\lim_{x\to 0}(1-9x^2)^{\frac{1}{\sin^2(2x)}}$ é

■ $e^{-\frac{9}{4}}$.

B $e^{-\frac{4}{9}}$.

C $e^{-\frac{3}{4}}$.

D $e^{-\frac{2}{9}}$.

E $e^{-\frac{1}{9}}$.

Solução: Note que $(1-9x^2)^{\frac{1}{\sin^2(2x)}} = e^{\frac{\ln(1-9x^2)}{\sin^2(2x)}}$. Usando a regra de L'Hospital, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-9x^2)}{\sin^2(2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-9x}{(1-9x^2)\sin(2x)\cos(2x)2}$. Multiplicando o numerador e o denominador por 2 e usando o limite fundamental em $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin(2x)} = 1$, obtemos que o limite acima vale $-\frac{9}{4}$.

Teste 27 [maxmin1] Seja $f(x) = \sqrt{3}x + \cos(2x)$, para $x \in \mathbb{R}$. Qual dos seguintes pontos é ponto de máximo local de f?

■ $-\dfrac{11\pi}{6}$.

B $\dfrac{\pi}{3}$.

C $-\dfrac{2\pi}{3}$.

D $\dfrac{5\pi}{6}$.

E $\dfrac{2\pi}{3}$.

Solução: Temos $f'(x) = \sqrt{3} - 2\sin(2x)$. Assim, $f'(x) = 0$ se $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, em que k é um número inteiro. Os pontos críticos são $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, k inteiro. Note que $f''(x) = -4\cos(2x)$. Portanto, se $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ então $f''(x) < 0$ (os pontos $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, k inteiro, são de máximo local) e se $2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ então $f''(x) > 0$ (os pontos $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, k inteiro, são de mínimo local).

Teste 28 [maxmin2] Seja $f(x) = \sqrt{3}x + \cos(2x)$, para $x \in \mathbb{R}$. Qual dos seguintes pontos é ponto de máximo local de f?

■ $-\dfrac{5\pi}{6}$.

B $\dfrac{\pi}{3}$.

C $-\dfrac{2\pi}{3}$.

D $\dfrac{5\pi}{6}$.

E $\dfrac{2\pi}{3}$.

Solução: Temos $f'(x) = \sqrt{3} - 2\sin(2x)$. Assim, $f'(x) = 0$ se $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, em que k é um número inteiro. Os pontos críticos são $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, k inteiro. Note que $f''(x) = -4\cos(2x)$. Portanto, se $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ então $f''(x) < 0$ (os pontos $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, k inteiro, são de máximo local) e se $2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ então $f''(x) > 0$ (os pontos $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, k inteiro, são de mínimo local).

Teste 29 [maxmin3] Seja $f(x) = \sqrt{3}x + \cos(2x)$, para $x \in \mathbb{R}$. Qual dos seguintes pontos é ponto de mínimo local de f?

■ $\frac{\pi}{3}$.

$\boxed{\text{B}}$ $\frac{\pi}{6}$.

$\boxed{\text{C}}$ $-\frac{5\pi}{6}$.

$\boxed{\text{D}}$ $-\frac{4\pi}{3}$.

$\boxed{\text{E}}$ $-\frac{\pi}{3}$.

Solução: Temos $f'(x) = \sqrt{3} - 2\sin(2x)$. Assim, $f'(x) = 0$ se $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, em que k é um número inteiro. Os pontos críticos são $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, k inteiro. Note que $f''(x) = -4\cos(2x)$. Portanto, se $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ então $f''(x) < 0$ (os pontos $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, k inteiro, são de máximo local) e se $2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ então $f''(x) > 0$ (os pontos $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, k inteiro, são de mínimo local).

Teste 30 [maxmin4] Seja $f(x) = \sqrt{3}x + \cos(2x)$, para $x \in \mathbb{R}$. Qual dos seguintes pontos é ponto de mínimo local de f?

■ $\frac{4\pi}{3}$.

$\boxed{\text{B}}$ $\frac{\pi}{6}$.

$\boxed{\text{C}}$ $-\frac{5\pi}{6}$.

$\boxed{\text{D}}$ $-\frac{4\pi}{3}$.

$\boxed{\text{E}}$ $-\frac{\pi}{3}$.

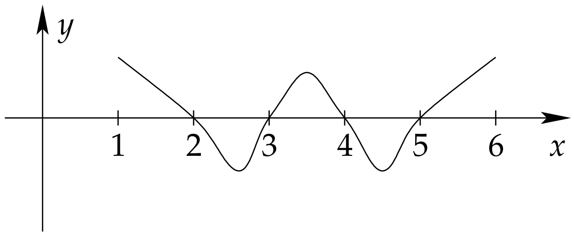
Solução: Temos $f'(x) = \sqrt{3} - 2\sin(2x)$. Assim, $f'(x) = 0$ se $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, em que k é um número inteiro. Os pontos críticos são $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, k inteiro. Note que $f''(x) = -4\cos(2x)$. Portanto, se $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ então $f''(x) < 0$ (os pontos $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, k inteiro, são de máximo local) e se $2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ então $f''(x) > 0$ (os pontos $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, k inteiro, são de mínimo local).

Teste 31 [raizes1] Seja $f\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que

I. $f(3) = 2$ e $f(5) = -3$;

II. as retas $x = 0$ e $y = x$ são assíntotas para f;

III. f' tem exatamente 4 raízes, e o gráfico de f' no intervalo $[1,6]$ está esboçado na figura abaixo.



É correto dizer que o número de raízes de f no intervalo $]0,+\infty[$ é

■ 3.
B 4.
C 0.
D 1.
E 2.

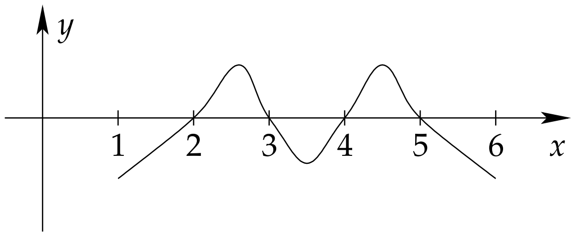
Solução: Em $[2,4]$, f não possui raízes, pois f é estritamente decrescente em $[2,3]$, estritamente crescente em $[3,4]$ e $f(3) > 0$. Em particular, $f(2) > 0$ e $f(4) > 0$. Como $x = 0$ é assíntota vertical para f e f é estritamente crescente em $]0,2]$, resulta que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. Além disso, $f(2) > 0$. Portanto, existe exatamente uma raiz de f em $]0,2]$. Em $[4,5]$ existe exatamente uma raiz real de f pois $f(4) > 0$, $f(5) < 0$ e f é estritamente decrescente nesse intervalo. Finalmente, em $[5,+\infty[$ também existe exatamente uma raiz real: f é estritamente crescente, $f(5) < 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, pelo fato de $y = x$ ser assíntota para $x \to +\infty$.

Teste 32 [raizes2] Seja $f\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que

I. $f(3) = -2$ e $f(5) = 3$;

II. as retas $x = 0$ e $y = -x$ são assíntotas para f;

III. f' tem exatamente 4 raízes, e o gráfico de f' no intervalo $[1,6]$ está esboçado na figura abaixo.



É correto dizer que o número de raízes de f no intervalo $]0,+\infty[$ é

■ 3.
[B] 4.
[C] 0.
[D] 1.
[E] 2.

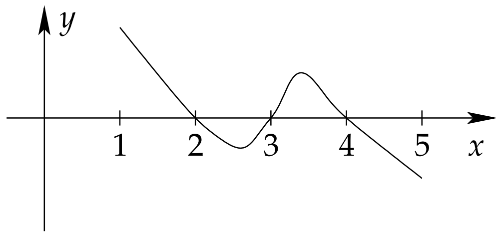
Solução: Em $[2,4]$, f não possui raízes, pois f é estritamente crescente em $[2,3]$, estritamente decrescente em $[3,4]$ e $f(3) < 0$. Em particular, $f(2) < 0$ e $f(4) < 0$. Como $x = 0$ é assíntota vertical para f e f é estritamente decrescente em $]0,2]$, resulta que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Além disso, $f(2) < 0$. Portanto, existe exatamente uma raiz de f em $]0,2]$. Em $[4,5]$ existe exatamente uma raiz real de f pois $f(4) < 0$, $f(5) > 0$ e f é estritamente crescente nesse intervalo. Finalmente, em $[5,+\infty[$ também existe exatamente uma raiz real: f é estritamente decrescente, $f(5) < 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, pelo fato de $y = -x$ ser assíntota para $x \to +\infty$.

Teste 33 [`raizes3`] Seja $f\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que

I. $f(3) = 2$;

II. as retas $x = 0$ e $y = -x$ são assíntotas para f;

III. f' tem exatamente 3 raízes, e o gráfico de f' no intervalo $[1,5]$ está esboçado na figura abaixo.



É correto dizer que o número de raízes de f no intervalo $]0,+\infty[$ é

■ 2.
[B] 3.
[C] 4.
[D] 0.
[E] 1.

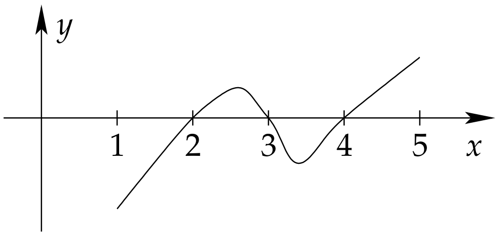
Solução: Em $[2,4]$, f não possui raízes, pois f é estritamente decrescente em $[2,3]$, estritamente crescente em $[3,4]$ e $f(3) > 0$. Em particular, $f(2) > 0$ e $f(4) > 0$. Como $x = 0$ é assíntota vertical para f e f é estritamente crescente em $]0,2]$, resulta que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. Além disso, $f(2) > 0$. Portanto, existe exatamente uma raiz de f em $]0,2]$. Em $[4,+\infty[$ também existe exatamente uma raiz real: f é estritamente decrescente, $f(4) > 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, pelo fato de $y = -x$ ser assíntota para $x \to +\infty$.

Teste 34 [raizes4] Seja $f\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que

I. $f(3) = -2$;

II. as retas $x = 0$ e $y = x$ são assíntotas para f;

III. f' tem exatamente 3 raízes, e o gráfico de f' no intervalo $[1,5]$ está esboçado na figura abaixo.



É correto dizer que o número de raízes de f no intervalo $]0,+\infty[$ é

■ 2.

B 3.

C 4.

D 0.

E 1.

Solução: Em $[2,4]$, f não possui raízes, pois f é estritamente crescente em $[2,3]$, estritamente decrescente em $[3,4]$ e $f(3) < 0$. Em particular, $f(2) < 0$ e $f(4) < 0$. Como $x = 0$ é assíntota vertical para f e f é estritamente decrescente em $]0,2]$, resulta que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Além disso, $f(2) < 0$. Portanto, existe exatamente uma raiz de f em $]0,2]$. Em $[4,+\infty[$ também existe exatamente uma raiz real: f é estritamente crescente, $f(4) < 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, pelo fato de $y = x$ ser assíntota para $x \to +\infty$.

Teste 35 [tvm1] Se $e^{\frac{3}{2}} < a < b < e^2$, então

$$\frac{\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a}}{b-a}$$

está no intervalo

■ $\left]-\dfrac{1}{2e^3}, -\dfrac{1}{e^4}\right[$.

B $\left]-\dfrac{1}{e^4}, -\dfrac{3}{2e^5}\right[$.

C $\left]-\dfrac{3}{2e^5}, -\dfrac{2}{e^6}\right[$.

D $\left]-\dfrac{2}{e^6}, -\dfrac{3}{e^8}\right[$.

E $\left]-\dfrac{3}{e^8}, -\dfrac{4}{e^{10}}\right[$.

Solução: Seja $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$. Temos $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. Como f é derivável para $x > 0$, podemos usar o TVM no intervalo $[a,b]$ e concluir que existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a}}{b-a}$. Observe agora que $f''(x) = \frac{-3+2\ln x}{x^3}$. Assim, $f''(x) > 0$ se $x > e^{\frac{3}{2}}$ e, portanto, f' é estritamente crescente em $[e^{\frac{3}{2}}, +\infty[$. Como $e^{\frac{3}{2}} < a < b < e^2$, temos que $f'(c) \in]f'(e^{\frac{3}{2}}), f'(e^2)[$, isto é, $f'(c) \in]-\frac{1}{2e^3}, -\frac{1}{e^4}[$.

Teste 36 [`tvm2`] Se $e^2 < a < b < e^{\frac{5}{2}}$, então

$$\frac{\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a}}{b - a}$$

está no intervalo

■ $\left] -\frac{1}{e^4}, -\frac{3}{2e^5} \right[$.

$\boxed{\text{B}}$ $\left] -\frac{1}{2e^3}, -\frac{1}{e^4} \right[$.

$\boxed{\text{C}}$ $\left] -\frac{3}{2e^5}, -\frac{2}{e^6} \right[$.

$\boxed{\text{D}}$ $\left] -\frac{2}{e^6}, -\frac{3}{e^8} \right[$.

$\boxed{\text{E}}$ $\left] -\frac{3}{e^8}, -\frac{4}{e^{10}} \right[$.

Solução: Seja $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$. Temos $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. Como f é derivável para $x > 0$, podemos usar o TVM no intervalo $[a,b]$ e concluir que existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a}}{b-a}$. Observe agora que $f''(x) = \frac{-3+2\ln x}{x^3}$. Assim, $f''(x) > 0$ se $x > e^{\frac{3}{2}}$ e, portanto, f' é estritamente crescente em $[e^{\frac{3}{2}}, +\infty[$. Como $e^{\frac{3}{2}} < e^2 < a < b < e^{\frac{5}{2}}$, temos que $f'(c) \in]f'(e^2), f'(e^{\frac{5}{2}})[$, isto é, $f'(c) \in \left] -\frac{1}{e^4}, -\frac{3}{2e^5} \right[$.

Teste 37 [`tvm3`] Se $e^{\frac{5}{2}} < a < b < e^3$, então

$$\frac{\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a}}{b - a}$$

está no intervalo

■ $\left] -\frac{3}{2e^5}, -\frac{2}{e^6} \right[$.

$\boxed{\text{B}}$ $\left] -\frac{1}{e^4}, -\frac{3}{2e^5} \right[$.

$\boxed{\text{C}}$ $\left] -\frac{1}{2e^3}, -\frac{1}{e^4} \right[$.

$\boxed{\text{D}}$ $\left] -\frac{2}{e^6}, -\frac{3}{e^8} \right[$.

$\boxed{\text{E}}$ $\left] -\frac{3}{e^8}, -\frac{4}{e^{10}} \right[$.

Solução: Seja $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$. Temos $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. Como f é derivável para $x > 0$, podemos usar o TVM no intervalo $[a,b]$ e concluir que existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a}}{b-a}$. Observe agora que $f''(x) = \frac{-3+2\ln x}{x^3}$. Assim, $f''(x) > 0$ se $x > e^{\frac{3}{2}}$ e, portanto, f' é estritamente crescente em $[e^{\frac{3}{2}}, +\infty[$. Como $e^{\frac{3}{2}} < e^{\frac{5}{2}} < a < b < e^3$, temos que $f'(c) \in]f'(e^{\frac{5}{2}}), f'(e^3)[$, isto é, $f'(c) \in \left] -\frac{3}{2e^5}, -\frac{2}{e^6} \right[$.

Teste 38 [tvm4] Se $e^3 < a < b < e^4$, então

$$\frac{\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a}}{b-a}$$

está no intervalo

■ $\left]-\dfrac{2}{e^6}, -\dfrac{3}{e^8}\right[$.

B $\left]-\dfrac{3}{2e^5}, -\dfrac{2}{e^6}\right[$.

C $\left]-\dfrac{1}{e^4}, -\dfrac{3}{2e^5}\right[$.

D $\left]-\dfrac{1}{2e^3}, -\dfrac{1}{e^4}\right[$.

E $\left]-\dfrac{3}{e^8}, -\dfrac{4}{e^{10}}\right[$.

Solução: Seja $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$. Temos $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. Como f é derivável para $x > 0$, podemos usar o TVM no intervalo $[a, b]$ e concluir que existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a}}{b-a}$. Observe agora que $f''(x) = \frac{-3+2\ln x}{x^3}$. Assim, $f''(x) > 0$ se $x > e^{\frac{3}{2}}$ e, portanto, f' é estritamente crescente em $[e^{\frac{3}{2}}, +\infty[$. Como $e^{\frac{3}{2}} < e^3 < a < b < e^4$, temos que $f'(c) \in]f'(e^3), f'(e^4)[$, isto é, $f'(c) \in \left]-\frac{2}{e^6}, -\frac{3}{e^8}\right[$.

Teste 39 [tvm5] Se $e^4 < a < b < e^5$, então

$$\frac{\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a}}{b-a}$$

está no intervalo

■ $\left]-\dfrac{3}{e^8}, -\dfrac{4}{e^{10}}\right[$.

B $\left]-\dfrac{2}{e^6}, -\dfrac{3}{e^8}\right[$.

C $\left]-\dfrac{3}{2e^5}, -\dfrac{2}{e^6}\right[$.

D $\left]-\dfrac{1}{e^4}, -\dfrac{3}{2e^5}\right[$.

E $\left]-\dfrac{1}{2e^3}, -\dfrac{1}{e^4}\right[$.

Solução: Seja $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$. Temos $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. Como f é derivável para $x > 0$, podemos usar o TVM no intervalo $[a, b]$ e concluir que existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a}}{b-a}$. Observe agora que $f''(x) = \frac{-3+2\ln x}{x^3}$. Assim, $f''(x) > 0$ se $x > e^{\frac{3}{2}}$ e, portanto, f' é estritamente crescente em $[e^{\frac{3}{2}}, +\infty[$. Como $e^{\frac{3}{2}} < e^4 < a < b < e^5$, temos que $f'(c) \in]f'(e^4), f'(e^5)[$, isto é, $f'(c) \in \left]-\frac{3}{e^8}, -\frac{4}{e^{10}}\right[$.

2019 – MAT-2453 – Segunda Prova – Folha de Respostas

Respostas ilegíveis ou não indicadas nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ______

____
Assinatura

Por favor coloque seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as **primeiras colunas** em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas:

Teste 1: ■ B C D E

Teste 2: ■ B C D E

Teste 3: ■ B C D E

Teste 4: ■ B C D E

Teste 5: ■ B C D E

Teste 6: ■ B C D E

Teste 7: ■ B C D E

Teste 8: ■ B C D E

Teste 9: ■ B C D E

Teste 10: ■ B C D E

Teste 11: ■ B C D E

Teste 12: ■ B C D E

Teste 13: ■ B C D E

Teste 14: ■ B C D E

Teste 15: ■ B C D E

Teste 16: ■ B C D E

Teste 17: ■ B C D E

Teste 18: ■ B C D E

Teste 19: ■ B C D E

Teste 20: ■ B C D E

Teste 21: ■ B C D E

Teste 22: ■ B C D E

Teste 23: ■ B C D E

Teste 24: ■ B C D E

Teste 25: ■ B C D E

Teste 26: ■ B C D E

Teste 27: ■ B C D E

Teste 28: ■ B C D E

Teste 29: ■ B C D E

Teste 30: ■ B C D E

Teste 31: ■ B C D E

Teste 32: ■ B C D E

Teste 33: ■ B C D E

Teste 34: ■ B C D E

Teste 35: ■ B C D E

Teste 36: ■ B C D E

Teste 37: ■ B C D E

Teste 38: ■ B C D E

Teste 39: ■ B C D E