1. APLICAÇÕES DE INTEGRAL DEFINIDA - CÁLCULO DE ÁREAS

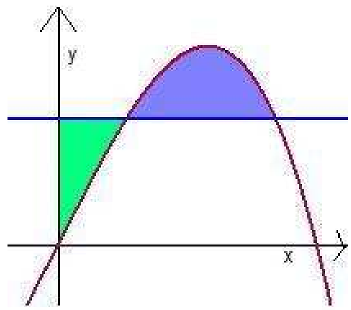
1. Calcule a área da região compreendida entre os gráficos das funções $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e $g(x) = 1 - \frac{x^2}{5}$ e as retas $x = 0$ e $x = 3$.

2. Desenhe a região A e calcule a sua área:
(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - 4,\ \ y \leq 12 - 3x^2\ \text{ e }\ y \leq 3x^2 + 12x + 12\}$,
(b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - 1,\ \ y \leq x + 1\ \text{ e }\ y \geq -x^2 - 3x - 2\}$.

3. Determine $m > 0$ para que a área delimitada por $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ e a reta $y = mx$ seja igual a 4.

4. Calcule área da região plana delimitada pela curva $y = x^3 - x$ e por sua reta tangente no ponto de abscissa $x = -1$.

5. A reta horizontal $y = c$ intercepta a curva $y = 2x - 3x^3$ no primeiro quadrante como mostra a figura. Determine c para que as áreas das duas regiões sombreadas sejam iguais.



6. Calcule $\displaystyle\int_0^1 x + \sqrt{1 - x^2}\, dx$, interpretando-a como uma área.

7. Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de $f(x) = x^3 - 2x + 1$ e $g(x) = -x + 1$, com $-1 \leq x \leq 1$.

8. Sejam $f : [-1,3] \to \mathbb{R}$ contínua com $f(x) \leq 0$, para todo $x \in [-1,3]$,

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 3 \text{ e } y \geq f(x)\} \ \text{ e }\ B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 3 \text{ e } y \leq x^2 + 3\}$$

tais que a área de $A \cap B$ seja igual a 23. Calcule $\displaystyle\int_{-1}^3 f(x)\, dx$.

RESPOSTAS

1. $\arctan 3 - 2\arctan 2 + \frac{26}{15}$
2. a) $\frac{104}{3}$, b) $\frac{107}{24}$
3. $m = 2$
4. $\frac{27}{4}$
5. $c = \frac{4}{9}$
6. $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$
7. $\frac{1}{2}$
8. $-\frac{5}{3}$

2. INTEGRAIS INDEFINIDAS

Calcule as integrais indefinidas abaixo:

1. $\displaystyle\int \frac{x^7 + x^2 + 1}{x^2}\, dx$ 2. $\displaystyle\int e^{2x}\, dx$ 3. $\displaystyle\int \cos 7x\, dx$ 4. $\displaystyle\int \tan^2 x\, dx$

5. $\displaystyle\int \frac{7}{x-2}\, dx$ 6. $\displaystyle\int \tan^3 x \sec^2 x\, dx$ 7. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\, dx$ 8. $\displaystyle\int \tan x\, dx$

9. $\displaystyle\int \tan^3 x\, dx$ 10. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\, dx$ 11. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\, dx$ 12. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$

13. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$

14. $\int \sec x\ dx$

15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

16. $\int x^2\sqrt[5]{x^3+1}\,dx$

17. $\int \frac{4x+8}{2x^2+8x+20}\,dx$

18. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

19. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)\ \sqrt{1-x^2}}$

20. $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

21. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$

22. $\int e^{x^3}x^2\,dx$

23. $\int e^x\sqrt[3]{1+e^x}\,dx$

24. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

25. $\int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx$

26. $\int 2x(x+1)^{2010}\,dx$

27. $\int x\ \sin x\ dx$

28. $\int e^x\ \cos x\ dx$

29. $\int x^r\ \ln x\ dx, r\in\mathbb{R}$

30. $\int (\ln x)^2\ dx$

31. $\int xe^{-x}\,dx$

32. $\int x\arctan x\ dx$

33. $\int \arcsin x\ dx$

34. $\int \sec^3 x\ dx$

35. $\int \cos^2 x\,dx$

36. $\int \sin^2 x\ \cos^3 x\ dx$

37. $\int \sin^2 x\ \cos^2 x\ dx$

38. $\int \frac{1-\sin x}{\cos x}\,dx$

39. $\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx$

40. $\int \frac{dx}{2x^2+8x+20}$

41. $\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)^2(x-2)}\,dx$

42. $\int \frac{x^5+x+1}{x^3-8}\,dx$

43. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

44. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

45. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

46. $\int \ln(x+\ \sqrt{1+x^2})\,dx$

47. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$

48. $\int \sqrt{x}\ \ln x\ dx$

49. $\int \sin(\ln x)\,dx$

50. $\int \frac{x}{x^2-4}\,dx$

51. $\int \frac{3x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3}\,dx$

52. $\int \sqrt{a^2+b^2x^2}\,dx$

53. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}$

54. $\int \sqrt{x^2-2x+2}\,dx$

55. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$

56. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

57. $\int \cos^3 x\,dx$

58. $\int \sin^5 x\ dx$

59. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\,dx$

60. $\int \sin^3\left(\frac{x}{2}\right)\cos^5\left(\frac{x}{2}\right)\ dx$

61. $\int \frac{dx}{\sin^5 x\ \cos^3 x}$

62. $\int \sin^4 x\ dx$

63. $\int \sin^2 x\ \cos^5 x\,dx$

64. $\int \sin^2 x\ \cos^4 x\ dx$

65. $\int \cos^6(3x)\,dx$

66. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}\,dx$

67. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\ \cos^4 x}$

68. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

69. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$
(Sugestão: faça $u=\sqrt[6]{x}$)

70. $\int \frac{x+1}{x^2(x^2+4)^2}\,dx$

71. $\int \frac{\arctan x}{x^2}\,dx$

72. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$

73. $\int \frac{4x^2-3x+3}{(x^2-2x+2)(x+1)}\,dx$

74. $\int \frac{dx}{1+e^x}$

75. $\int \frac{\ln(x+1)}{x^2}\,dx$

76. $\int x^5 e^{-x^3} dx$

77. $\int \frac{x+1}{x^2(x^2+4)} dx$

RESPOSTAS

1. $\frac{x^6}{6} + x - \frac{1}{x} + k$
2. $\frac{e^{2x}}{2} + k$
3. $\frac{1}{7}\sin 7x + k$
4. $\tan x - x + k$
5. $7\ln|x-2| + k$
6. $\frac{1}{4}\tan^4 x + k$
7. $2\sqrt{\cos x}(\frac{1}{5}\cos^2 x - 1) + k$
8. $-\ln|\cos x| + k$
9. $\frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + k$
10. $\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + k$
11. $\frac{1}{2}\arctan x^2 + k$
12. $x - \arctan x + k$
13. $-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + k$
14. $\ln|\sec x + \tan x| + k$
15. $2\sqrt{1+\ln x} + k$
16. $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+1)^6} + k$
17. $\ln(2x^2+8x+20) + k$
18. $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + k$
19. $\ln|\text{arcsen}\, x| + k$
20. $\ln(1+e^x) + k$
21. $-\ln(1+\cos^2 x) + k$
22. $\frac{1}{3}e^{x^3} + k$
23. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+e^x)^4} + k$
24. $-2\cos\sqrt{x} + k$
25. $e^{\text{arctg} x} + k$
26. $2(x+1)^{2011}(\frac{x+1}{2012} - \frac{1}{2011}) + k$
27. $-x\cos x + \sin x + k$
28. $\frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + k$
29. $\begin{cases} \frac{x^{r+1}}{r+1}\ln x - \frac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + k, \text{ se } r \neq -1 \\ \frac{1}{2}(\ln x)^2 + k, \text{ se } r = -1 \end{cases}$
30. $x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + k$
31. $(-x-1)e^{-x} + k$
32. $\frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arctan x + k$
33. $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + k$
34. $\frac{1}{2}\sec x\tan x + \frac{1}{2}\ln \sec x + \tan x| + k$
35. $\frac{1}{2}(x + \sin x\cos x) + k$
36. $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + k$
37. $\frac{1}{8}(x - \frac{1}{4}\sin 4x) + k$
38. $\ln|1+\sin x| + k$
39. $6\ln|x-1| - 25\ln|x-2| + 22\ln|x-3| + k$
40. $\frac{\sqrt{6}}{12}\text{arctg}(\frac{x+2}{\sqrt{6}}) + k$
41. $-22\ln|x-1| + \frac{12}{x-1} + 25\ln|x-2| + k$
42. $\frac{x^3}{3} + \frac{35}{12}\ln|x-2| + \frac{61}{24}\ln(1 + (\frac{x+1}{\sqrt{3}})^2) + \frac{\sqrt{3}}{12}\arctan(\frac{x+1}{\sqrt{3}}) + k$
43. $\frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + k$
44. $\frac{x}{8}(2x^2-1)\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{8}\arcsin x + k$
45. $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + k$
46. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + k$
47. $\ln|\sqrt{5-2x+x^2} + x - 1| + k$
48. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x - \frac{2}{3}) + k$
49. $\frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + k$
50. $\frac{1}{2}\ln|x^2-4| + k$
51. $2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}(\frac{x+1}{\sqrt{2}}) + k$
52. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+b^2x^2} + \frac{a^2}{2b}\ln(bx + \sqrt{a^2+b^2x^2}) + k$
53. $\frac{1}{b}\ln(\frac{bx}{a} + \frac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a}) + k$
54. $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2} + \frac{1}{2}\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+2}) + k$
55. $\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + 2\text{arcsen}(\frac{x+1}{2}) + k$
56. $\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}) + k$
57. $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + k$
58. $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + k$
59. $\frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{2\sin^2 x} - 2\ln|\sin x| + k$
60. $\frac{1}{4}\cos^8(\frac{x}{2}) - \frac{1}{3}\cos^6(\frac{x}{2}) + k$
61. $\frac{1}{2}\tan^2 x + 3\ln|\tan x| - \frac{3}{2\tan^2 x} - \frac{1}{4\tan^4 x} + k$
62. $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + k$
63. $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + k$
64. $\frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin(4x) + \frac{1}{48}\sin^3(2x) + k$
65. $\frac{5}{16}x + \frac{1}{12}\sin(6x) + \frac{1}{64}\sin(12x) - \frac{1}{144}\sin^3(6x) + k$
66. $-\frac{1}{3}\text{cotg}^3 x - \frac{1}{5}\text{cotg}^5 x + k$
67. $\tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x - 2\text{cotg}(2x) + k$
68. $\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + k$
69. $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x} - 1| + k$
70. $\frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{16x} - \frac{1}{32}\ln(x^2+4) - \frac{3}{64}\arctan\frac{x}{2} + \frac{4-x}{32(x^2+4)} + k$
71. $\frac{-\arctan x}{x} + \ln|x| - \ln\sqrt{1+x^2} + k$
72. $\frac{3}{2}\arcsin(x-1) - \left(\frac{x+3}{2}\right)\sqrt{2x-x^2} + k$
73. $2\ln|x+1| + \ln(x^2-2x+2) + \arctan(x-1) + k$
74. $x - \ln(1+e^x) + k$
75. $-\frac{\ln(x+1)}{x} + \ln|x| - \ln(x+1) + k$
76. $-\frac{1}{3}(x^3+1)e^{-x^3} + k$
77. $\frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{4x} - \frac{1}{8}\ln(x^2+4) - \frac{1}{8}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + k$

1. Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3 \sin(x^2+1)\,dx$.

2. Encontre o volume de uma pirâmide cuja base é o quadrado de lado L e cuja altura é h.

3. Calcule o volume do sólido cuja base é a astróide de equação $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ e tal que as seções transversais por planos paralelos ao plano Oxz são quadrados.

4. Calcule o comprimento do gráfico de $f(x) = \ln(\cos x)$, para $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

5. Calcule a área da região do plano limitada pela elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

6. Determine o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo Ox do conjunto

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le xy \le 2,\ x^2+y^2 \le 5 \text{ e } x > 0\}$.

(b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge \sqrt{x} \text{ e } (x-1)^2 + y^2 \le 1\}$.

(c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2 \text{ e } e^{-x} \le y \le e^{x}\}$.

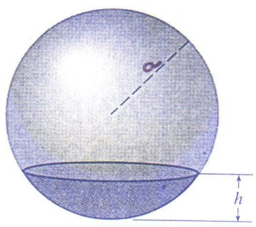
(d) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y \le 1 \text{ e } 1/x \le y \le 4/x^2\}$.

7. Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \text{ e } \ln(x+1)+2 \le y \le e^x + 4\}$. Determine o volume do sólido obtido pela rotação de A em torno da reta $y = 2$.

8. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $y = 3$ da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$.

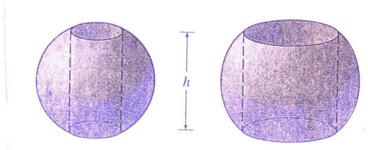
9. O disco $x^2 + y^2 \le a^2$ é girado em torno da reta $x = b$, com $b > a$, para gerar um sólido, com a forma de um pneu. Esse sólido é chamado **toro**. Calcule seu volume.

10. Calcule o volume de uma calota esférica de altura h, $h \le a$, de uma esfera de raio a.



11. Determine o comprimento da curva $y = \cosh x$, $-3 \le x \le 4$.

12. Um anel esférico é o sólido que permanece após a perfuração de um buraco cilíndrico através do centro de uma esfera sólida. Se a esfera tem raio R e o anel esférico tem altura h, prove o fato notável de que o volume do anel depende de h, mas não de R.



Respostas

1. 0.

2. $L^2h/3$.

3. $\frac{128}{105}a^3$.

4. $\ln(1+\sqrt{2})$.

5. πab.

6. (a) $\frac{10\sqrt{5}-2}{3}\pi$.

(b) $\frac{\pi}{6}$.

(c) $\frac{\pi}{2}(e^2 - e^{-2})^2$.

(d) $\frac{5\pi}{6}$.

7. $\pi\left[\int_0^1 (e^x+2)^2dx - \int_0^1 \ln^2(x+1)dx\right]$

8. $\frac{32}{3}\pi$.

9. $(2\pi b)(\pi a^2)$.

10. $\pi h^2(a - \frac{h}{3})$.

11. $\operatorname{senh}4 + \operatorname{senh}3$.

---

4. Aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo

1. Seja f uma função contínua em um intervalo $[a,b]$ e sejam $u(x)$ e $v(x)$ funções diferenciáveis cujos valores estão em $[a,b]$. Prove que

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}.$$

A fórmula acima é conhecida como *Regra de Leibnitz*.

2. Calcule $g'(x)$ onde

(a) $g(x) = \displaystyle\int_{\cos x}^{\sin x} e^{t^2} dt$ (b) $g(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sin(t^2)dt$

3. Seja $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^3}\,dt$. Calcule $\displaystyle\int_0^2 xF(x)dx$ em termos de $F(2)$.

4. Seja f uma função contínua em um intervalo I contendo a origem e seja

$$y = y(x) = \int_0^x \sin(x-t)f(t)\,dt$$

Prove que $y'' + y = f(x)$ e $y(0) = y'(0) = 0$, para todo $x \in I$.

5. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos(t^2)\,dt}{\int_0^x e^{-t^2}\,dt}$.

6. Mostre que $f(x) = \displaystyle\int_0^{1/x} \frac{1}{t^2+1}\,dt + \int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,dt$ é constante em $(0,\infty)$. Qual o valor dessa constante?

7. Seja $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\frac{x^2-t^2}{2}}\,dt$. Mostre que $f'(x) - xf(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

8. Seja $F : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \displaystyle\int_1^x \sqrt{t^3-1}dt$.

(a) Calcule o comprimento do gráfico de F entre $x = 1$ e $x = 4$.

(b) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{F(x^3) - F(8)}{\sin(x-2)}$

Respostas

3. $2F(2) - \frac{26}{9}$.
5. 0.
6. $\frac{\pi}{2}$.
8. (a) $\frac{62}{5}$ (b) $12\sqrt{511}$

---

5. Polinômio de Taylor

1. Utilizando o polinômio de Taylor de ordem 2, calcule um valor aproximado e avalie o erro.

(a) $\sqrt[3]{8,2}$ (b) $\ln(1,3)$ (c) $\sin(0,1)$

2. Mostre que:

(a) $|\sin x - x| \le \dfrac{|x^3|}{3!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (b) $0 \le e^x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right) < \dfrac{x^3}{2}$, $\forall x \in [0,1]$

3. (a) Seja $n > 0$ um inteiro ímpar. Mostre que

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}x^n}{n!}\right)\right| \le \frac{|x^{n+2}|}{(n+2)!}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) avalie $\sin 1$ com erro inferior a 10^{-5}.

4. (a) Determine o polinômio de Taylor de ordem n da função $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$.

(b) Avalie e com erro, em módulo, inferior a 10^{-5}.

(c) Mostre que $\left|e^{x^2} - \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!}\right)\right| \le \frac{e^{x^2}x^{2n+2}}{(n+1)!}, \forall x \in \mathbb{R}$.

(d) Avalie $e^{0,25}$ com erro inferior a 2^{-18}.

5. Seja $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ e suponha que $x_0 \in]a,b[$ seja um ponto crítico de f. Mostre que:

(a) se $f''(x_0) > 0$, então x_0 é um ponto de mínimo local de f;

(b) se $f''(x_0) < 0$, então x_0 é um ponto de máximo local de f.

6. Miscelânea

1. *Trabalho*. Quando uma **força constante** de intensidade F é aplicada na direção do movimento de um objeto e esse objeto é deslocado de uma distância d, definimos o **trabalho** W realizado pela força sobre o objeto por $W = F.d$, se a força age no sentido do movimento e por $W = -F.d$, se ela age no sentido oposto. Suponha agora que um objeto está se movendo na direção positiva ao longo do eixo x, sujeito a uma **força variável** $F(x)$. Defina o trabalho W realizado pela força sobre o objeto quando este é deslocado de $x = a$ até $x = b$, e encontre uma fórmula para calculá-lo.

2. *Energia cinética*. Use as notações do exercício anterior, a segunda lei de Newton e a regra da cadeia

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

para mostrar que o trabalho realizado por uma força F atuando sobre uma partícula de massa m que se moveu de x_1 até x_2 é

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2,$$

onde v_1 e v_2 são as velocidades do corpo em x_1 e x_2. Em Física, a expressão $\frac{1}{2}mv^2$ é chamada de **energia cinética** de um corpo em movimento com velocidade v. Portanto, o trabalho realizado por uma força é igual à variação da energia cinética do corpo e podemos determinar o trabalho calculando esta variação.

3. Suponha que uma partícula se desloca ao longo do eixo $0x$, segundo uma função horária $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ e sob ação de uma força $f(x)\overrightarrow{i}$, dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Admita que a dinâmica da partícula é governada por um modelo relativístico: sua massa m depende da sua velocidade v, segundo a função $m : (-c, c) \to \mathbb{R}$ definida por (dados $c > 0$ velocidade da luz e $m_0 > 0$ massa de repouso):

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

e sua função horária x satisfaz a equação diferencial:

$$\frac{d}{dt}\big(m(x'(t))x'(t)\big) = f\big(x(t)\big).$$

Mostre que, se interpretarmos o trabalho $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$ realizado pela força f quando a partícula se desloca de $x_0 = x(t_0)$ a $x_1 = x(t_1)$ como variação de energia ΔE, e se $\Delta m = m\big(x'(t_1)\big) - m\big(x'(t_0)\big)$, então

$$\Delta E = \Delta m\, c^2.$$

Sugestão: Use o teorema de mudança de variáveis na integral de Riemann e o teorema fundamental do cálculo.

4. Seja $G(x) = \displaystyle\int_0^x \left(t \int_0^t e^{u^2}\, du \right) dt$. Calcule $G'(x)$ e $G''(x)$.

5. Calcule o comprimento da astróide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

6. Seja $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que f é crescente e ímpar.

(b) Mostre que $f(x) \leq f(1) + 1 - \dfrac{1}{x}$, $\forall x \geq 1$. (Sugestão: Integre $0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leq \frac{1}{t^2}$ de 1 a x.)

(c) Mostre que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existe e é um número real positivo.

(d) Esboce o gráfico de $f(x)$, localizando seu ponto de inflexão.

7. Estude as seguintes integrais de Riemann impróprias:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\, dx$; (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$; (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\, dx$.

8. Avalie $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2} dx$ com erro inferior a 10^{-5}.

9. Mostre, usando o polinômio de Taylor, que $\left| \displaystyle\int_0^1 \cos(x^2)dx - \left(1 - \frac{1}{5.2!} + \frac{1}{9.4!} - \frac{1}{13.6!}\right) \right| \leq \dfrac{1}{15.7!}$.

RESPOSTAS

4. $G'(x) = x\int_0^x \mathrm{e}^{u^2}du$,
$G''(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{u^2}du + x\mathrm{e}^{x^2}$.

5. $6a$.
7. (a) -1; (b) $\frac{\pi}{4}$; (c) 1.

7. TESTES

Questão 1. Sabendo que $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ é uma função contínua que satisfaz a equação $2 + \int_a^{x^3} f(t)dt = \mathrm{e}^{3x}$, para todo $x > 0$ e algum $a > 0$, então $f(t)$ é igual a:

(a) $t^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{3\sqrt[3]{t}}$; (b) $t^{-\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{3\sqrt[3]{t}}$; (c) $t^{\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{3\sqrt[3]{t}}$; (d) $t^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{2\sqrt[3]{t}}$; (e) $t^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{2\sqrt[3]{t}}$.

Questão 2. Seja R a região do primeiro quadrante delimitada pela curva $y = 1 + \dfrac{x^2}{2}$ e pela reta normal à essa curva no ponto $(2, 3)$. O volume do sólido gerado pela rotação da região R em torno do eixo Ox é:

(a) $\frac{360\pi}{15}$; (b) $\frac{361\pi}{15}$; (c) $\frac{362\pi}{15}$; (d) $\frac{363\pi}{15}$; (e) $\frac{364\pi}{15}$.

Questão 3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x \left(\int_1^{\sin x} \mathrm{e}^{t^2} dt \right) dx$ é igual a:

(a) $-\frac{1}{3}(\mathrm{e}+1)$; (b) $\frac{1}{2}(\mathrm{e}-2)$; (c) $-\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)$; (d) $\frac{1}{2}(\mathrm{e}+1)$; (e) $-\frac{1}{3}(\mathrm{e}-1)$.

Questão 4. Se a e b são números positivos distintos então $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{(1+e^{ax})(1+e^{bx})} dx$ vale

(a) 0; (b) 1; (c) $a - b$; (d) $(a - b)\ln 2$; (e) $\dfrac{(a-b)}{ab}\ln 2$.

Questão 5. O valor de $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos t + \sqrt{1+t^2}\sin^3 t \cos^3 t)\, dt$ é:

(a) $\sqrt{2}$; (b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; (c) $-\sqrt{2}$; (d) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; (e) 0.

Questão 6. Sobre $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(t)}{\sin^3(t)+\cos^3(t)}\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(t)}{\sin^3(t)+\cos^3(t)}\, dt$ pode ser afirmar que:

(a) vale 0;
(b) é positiva e menor que $\dfrac{\pi}{2}$;
(c) é negativa e maior que $-\dfrac{\pi}{2}$;
(d) é maior que $\dfrac{\pi}{2}$;
(e) é menor que $-\dfrac{\pi}{2}$.

Questão 7. A integral $\displaystyle\int_{e^{-3}}^{e^{-2}} \frac{1}{x\ln x}\, dx$ é

(a) 1; (b) $\dfrac{2}{3}$; (c) $\dfrac{3}{2}$; (d) $\ln\dfrac{2}{3}$; (e) $\ln\dfrac{3}{2}$.

Questão 8. A região limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$ no primeiro quadrante é rotacionada em torno do eixo Oy. O volume do sólido obtido é:

(a) $\dfrac{\pi}{12}$; (b) $\dfrac{\pi}{6}$; (c) $\dfrac{\pi}{3}$; (d) $\dfrac{2\pi}{3}$; (e) $\dfrac{3\pi}{2}$.

Questão 9. O valor de $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{x^3}^{x^4} e^{t^2}\, dt$ é

(a) $e^{x^6}(e^{x^8-x^6}-1)$; (b) $4x^3e^{x^8}$; (c) $\dfrac{1}{\sqrt{1-e^{x^2}}}$; (d) $\dfrac{e^{x^2}}{x^2} - 1$; (e) $x^2e^{x^6}(4xe^{x^8-x^6} - 3)$.

RESPOSTAS

1. (b)
2. (e)
3. (c)
4. (e)
5. (a)
6. (a)
7. (d)
8. (b)
9. (e)