



1. LIMITES DE FUNÇÕES

EXERCÍCIOS

1.1. Calcule, quando existirem, os limites abaixo:

a. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 + 9x^2 + 12x + 4}{-x^3 - 2x^2 + 4x + 8}$

d. $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\sqrt[4]{2x} - 1}{\sqrt{2x} - 1}$

g. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 20x}{\sin 301x}$

j. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$

m. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(3x^2 - 5x + 2)}{x^2 + x - 2}$

p. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^4 + x^2}}{x}$

s. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$

v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{9x+1}}$

y. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 + 2x - 8}{\sqrt{x^6 + x + 1}}$

β . $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + x \cos \sqrt{x}}{x^4 \sin(\frac{1}{x}) + 1}$

ϵ . $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$

b. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 + 16} - 5}{x^2 + 3x}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 1} - 1}{x^4}$

h. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin 2x)}{x}$

k. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

n. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^3 - x^2}$

q. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} - \frac{3}{1-x^3}$

t. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}}$

w. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$

z. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 9} + x + 3$

γ . $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}(\sin x + \sqrt{x} \cos x)}{x\sqrt{x} - \sin(x\sqrt{x})}$

ζ . $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 - 5x + 3}}{x^2 - 1}$

c. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 12} - 4}{2 - \sqrt{x^3 - 4}}$

f. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \tan(3x) \operatorname{cosec}(6x)$

l. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$

o. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3(x) \sin(\frac{1}{x})}{x^2}$

r. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin(x^3 - 1) \cos(\frac{1}{1-x})}{\sqrt{x} - 1}$

u. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$

x. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^4 - 1}$

α . $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 2x) \sin(x^2 - 4)}{\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{4x}}$

δ . $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{7x^{12} + 5x^4 + 7}}{2x^3 + 2}$

η . $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x + 2x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x - \sqrt{1 + x^2}}$

1.2. A resolução abaixo está incorreta. Indique onde ocorrem os erros e então calcule o limite corretamente.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \underbrace{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1\right)}_{\rightarrow 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

1.3. Sejam $c, L \in \mathbb{R}$ tais que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + cx + c}{x^2 - 1} = L$. Determine c e L .

1.4. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

- a. Supondo que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2} = 1$, calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x}$.
- b. Supondo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, calcule $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- c. Supondo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + x} = +\infty$, calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

1.5. Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

- a. Se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções tais que f é limitada e positiva e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, então tem-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = +\infty$.
- b. Se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções tais que f é limitada e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, então tem-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + g(x) = +\infty$.
- c. Se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções tais que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = +\infty$.

1.6. Dê exemplos de funções f e g tais que

- a. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;
- b. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) - g(x) = 1$;
- c. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) - g(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 1$;
- d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) - g(x) \neq 0$.

1.7. Mostre que se $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e g é limitada então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = 0$.

1.8. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x)| \leq 2|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3)}{x}$.

1.9. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $1 + x^2 + \frac{x^6}{6} \leq f(x) + 1 \leq \sec x^2 + \frac{x^6}{3}$, para todo x no intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cos\left(\frac{1}{x^2 + x}\right)$.

1.10. Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $|\sin x| \leq f(x) \leq 3|x|$ e $0 \leq g(x) \leq 1 + |\sin(x)|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) + \cos x$.

1.11. Sejam C o círculo de raio 1 e centro em $(1, 0)$ e C_r o círculo de raio r , $0 < r < 2$, e centro em $(0, 0)$. Sejam ainda P_r o ponto $(0, r)$ e Q_r o ponto de interseção dos círculos C e C_r situado no primeiro quadrante.

Se L_r é a interseção da reta $P_r Q_r$ com o eixo Ox , o que acontecerá com L_r , quando C_r encolher arbitrariamente?

2. CONTINUIDADE DE FUNÇÕES

EXERCÍCIOS

2.1. Determine, se existir, o valor de $L \in \mathbb{R}$ para que cada uma das funções abaixo sejam contínuas.

a. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + 2) - \sin(x + 2)}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ L, & \text{se } x = 0. \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^8 + x^4}}{x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ L, & \text{se } x = 0. \end{cases}$

2.2. Determine os pontos de continuidade de cada uma das funções abaixo.

$$\text{a. } f(x) = \begin{cases} \sin(x^2 - 4) + 5, & \text{se } x > 2 \\ \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}, & \text{se } x < 2 \\ 5, & x = 2. \end{cases}$$

$$\text{b. } f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 - 4x + 3|}{x - 3}, & \text{se } x \neq 3 \\ 1, & \text{se } x = 3. \end{cases}$$

$$\text{c. } f(x) = \frac{1 + (-1)^{\lfloor x \rfloor}}{2} \sin(\pi x)$$

$$\text{d. } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ é irracional e } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{q}, & \text{se } x = \frac{p}{q}, \text{ com } \text{mdc}(p, q) = 1. \end{cases}$$

Obs.: $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x .

2.3. Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

a. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $|f|$ é contínua em $x = 0$, então f é contínua em $x = 0$.

b. Se f e g são funções descontínuas em $x = 0$, então a função fg é descontínua em $x = 0$.

2.4. Construa uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que é contínua em um único ponto.

2.5. Construa uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que é contínua somente em dois pontos.

3. DERIVADAS

EXERCÍCIOS

3.1. Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo aberto I , $a \in I$ e $h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \geq a, \\ g(x), & \text{se } x < a. \end{cases}$

Mostre que h é derivável em a se e somente se $f(a) = g(a)$ e $f'(a) = g'(a)$. Construa contra-exemplos removendo uma das condições de cada vez.

3.2. Verifique se cada uma das funções abaixo é contínua e se é derivável no ponto x_0 indicado.

$$\text{a. } f(x) = \begin{cases} (x^2 + x) \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}, x_0 = 0;$$

$$\text{b. } f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}, x_0 = 0;$$

$$\text{c. } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}, x_0 = 0;$$

$$\text{d. } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}, x_0 = 0.$$

3.3. Construa uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável num único ponto.

3.4. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3+x)^2 - \tan 9}{x}$.

3.5. Calcule $f'(0)$, sendo $f(x) = \begin{cases} g(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ e $g(0) = g'(0) = 0$.

3.6. Explícite as derivadas de

$$\text{a. } f(x) = \tan x; \quad \text{b. } f(x) = \cot x; \quad \text{c. } f(x) = \sec x; \quad \text{d. } f(x) = \operatorname{cosec} x.$$

3.7. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq |x^3 + x^2|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é derivável em $x_0 = 0$.

3.8. Sabendo-se que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em $a \in]0, +\infty[$, calcule $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$ em termos de $f'(a)$.

3.9. Considere a função $f(x) = x|x|$. Decida se f é derivável em $x_0 = 0$ e calcule $f'(0)$ em caso afirmativo.

3.10. Derive:

a. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

b. $f(x) = \frac{4x-x^4}{(x^3+2)^{2015}}$

c. $f(x) = x \sin(\sqrt[3]{x^5-x^2})$

d. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2} \cos x}{(x^4 + \tan^2(x) + 1)^2}$

e. $f(x) = \sec(\tan x)$

f. $f(x) = x(\sin x)(\cos x)$

g. $f(x) = \frac{(x+a)^5}{x^5-b^5}$

h. $f(x) = \frac{1}{\sin(x-\sin x)}$

i. $f(x) = \cot(3x^2+5)$.

3.11. Decida em que pontos as funções a seguir são deriváveis.

a. $f(x) = \sqrt{x^4+x^6}$; b. $f(x) = \sqrt{x^4+x^2}$.

3.12. Sejam $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em $x_0 = 0$ tal que $f(0) = f'(0) = 0$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada (não necessariamente derivável em $x_0 = 0$). A função $h(x) = f(x)g(x)$ é derivável em $x_0 = 0$? Exiba $h'(0)$ em caso afirmativo.

3.13. Responda, justificando:

a. Se $f+g$ é derivável em x_0 , é verdade que necessariamente que f e g também são deriváveis em x_0 ?

b. Se $f \cdot g$ é derivável em x_0 , quais condições sobre f garantem a derivabilidade de g em x_0 ?

3.14. Decida, justificando ou apresentando contra-exemplo, se cada uma das setenças abaixo é verdadeira ou falsa:

a. Se f é derivável em x_0 então $|f(x)|$ é derivável em x_0 , desde que $f(x_0) \neq 0$. Dê contra-exemplo no caso em que $f(x_0) = 0$.

b. Se f, g são duas funções deriváveis em x_0 então as funções $h_1(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $h_2(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ são deriváveis em x_0 .

c. Suponha que $f(x) = xg(x)$, onde g é uma função contínua em $x_0 = 0$. Então f é derivável em $x_0 = 0$.

d. É possível escrever $x = f(x)g(x)$ com f, g deriváveis tais que $f(0) = g(0) = 0$.

3.15. Determine todos os pontos (x_0, y_0) sobre a curva $y = 4x^4 - 8x^2 + 16x + 7$ tais que a tangente à curva em (x_0, y_0) seja paralela à reta $16x - y + 5 = 0$.

3.16. Mostre que qualquer par de retas tangentes à parábola $y = ax^2$, ($a \neq 0$) tem como interseção um ponto que esta numa reta vertical que passa pelo ponto médio do segmento que une os pontos de tangência destas retas.

3.17. Seja $y = f(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $x^2 = y^3(2-y)$. Admitindo que f é derivável, determine a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1)$.

3.18. Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivável, onde I é um intervalo aberto contendo $x = -1$. Suponha que $f^3(x) - f^2(x) + xf(x) = 2$, para todo $x \in I$. Encontre $f(-1)$ e a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(-1, f(-1))$.

4. TAXAS RELACIONADAS

EXERCÍCIOS

4.1. Um objeto circular tem seu raio variando de maneira desconhecida, mas sabe-se que quando seu raio é $6m$, a taxa de variação deste é $4m/s$. Determine a taxa de variação da área do objeto no instante em que seu raio é $6m$.

4.2. Suponha agora que o objeto circular do exercício 1 é, na verdade, um equador de um objeto esférico. Determine a taxa de variação do volume do objeto e de sua área, quando o raio é $6m$.

Dica. Você pode expressar o volume em termos do raio da esfera, ou então a partir da área.

- 4.3. A área entre dois círculos concêntricos variáveis é constante igual a $9\pi m^2$. A taxa de variação da área do círculo maior é de $10\pi m^2/s$. Qual a taxa de variação do raio em relação ao tempo do círculo menor quando ele tem área 16π ?
- 4.4. A partícula A se move ao longo do semi-eixo positivo Ox e a partícula B move-se ao longo do gráfico da função $f(x) = -\sqrt{3}x$, $x \leq 0$. Num certo instante, a partícula A está no ponto $(5, 0)$ e afasta-se da origem com velocidade 3 unidades por segundo e a distância de B até a origem é 3 unidades, afastando-se da origem com velocidade 4 unidades por segundo. Qual a taxa de variação da distância entre A e B nesse instante?
- 4.5. Num certo instante t_0 , a altura de um triângulo cresce à razão $1\text{cm}/\text{min}$ e sua área aumenta à razão de $2\text{cm}^2/\text{min}$. No instante t_0 , sabendo que sua altura é 10cm e sua área é 100cm^2 , qual a taxa de variação em relação ao tempo da base do triângulo?
- 4.6. Despeja-se areia sobre o chão fazendo um monte que tem, a cada instante, a forma de um cone com diâmetro da base igual a três vezes a altura. Quando a altura do monte é de 1.2m , a taxa de variação com que a areia é despejada é de $0,081\text{m}^3/\text{min}$. Qual a taxa de variação da altura do monte neste instante?
- 4.7. Uma lâmpada está acesa no solo a 15m de um edifício. Um homem de 1.8m de altura anda a partir da luz em direção ao edifício a $1.2\text{m}/\text{s}$. Determine a velocidade com que o comprimento de sua sombra sobre o edifício diminui quando ele está a 12m do edifício e quando ele está a 9m do edifício.
- 4.8. Num motor à combustão, uma biela de 7cm tem uma de suas extremidades acoplada a uma manivela cujo raio é de 3cm . Na outra extremidade da biela está um pistão que se move quando a manivela gira (vide 1). Sabendo que a manivela gira no sentido anti-horário a uma taxa constante de 200 rotações por minuto, calcule a velocidade do pistão quando o ângulo de rotação do disco é $\pi/3$ (medido a partir da posição em que o pistão está mais afastado do disco).

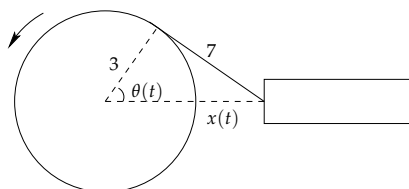


FIGURA 1. Pistão para a questão 8

- 4.9. Uma escada de bombeiro com 25m está encostada na parede de um prédio e sua base se afasta da parede. Num certo instante, a base da escada se encontra a 7m da parede e sua velocidade é de $2\text{m}/\text{s}$.
- Qual a velocidade com a qual o topo da escada se move nesse instante?
 - Considere o triângulo formado pela parede da casa, a escada e o chão. Calcule a taxa de variação da área deste triângulo no instante em que a base da escada se encontra a 7m da parede.
 - Calcule a taxa de variação do ângulo formado entre a parede da casa e a escada, quando a base da escada estiver a 7m da parede.
- 4.10. Uma mangueira está enchendo um tanque de gasolina que tem o formato de um cilindro "deitado" de diâmetro 2m e comprimento 3m . A figura 2 representa uma seção transversal do tanque no instante t . O ângulo θ varia de zero (tanque vazio) a π (tanque cheio). No instante em que a altura h do líquido é de 0.5m , a vazão é de $0.9\text{m}^3/\text{min}$. Determine a taxa de variação do ângulo θ nesse instante. Determine também a taxa de variação da altura h do neste mesmo instante.

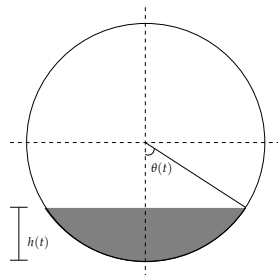


FIGURA 2. Tanque para a questão 10

- 4.11. Num filtro com formato de cone, como na figura 3, um líquido escoa da parte superior para a parte inferior passando por um orifício de dimensões desprezíveis. Num certo instante, a altura H do líquido depositado na parte inferior é 8cm , a altura h do líquido da parte superior é 10cm e h está diminuindo a uma taxa de variação instantânea de $2\text{cm}/\text{min}$. Calcule a taxa de variação de H em relação ao tempo nesse instante.

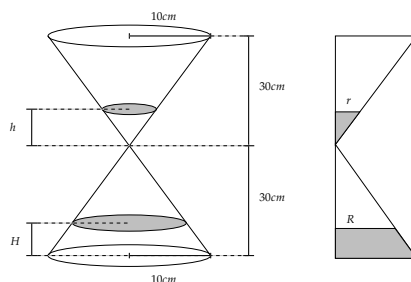


FIGURA 3. Filtro para a questão 11

5. DERIVADAS DE FUNÇÕES INVERSAS

EXERCÍCIOS

- 5.1. Suponha que f seja uma função injetora, derivável, e que sua inversa, f^{-1} , também seja derivável. Mostre que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

- 5.2. Calcule a derivada das seguintes funções:

a. $f(x) = \arctan(x)$; b. $f(x) = \arcsin(x)$; c. $f(x) = \arccos(x)$.

- 5.3. Derive:

a. $f(x) = \cos(\arctan(x))$; b. $f(x) = \frac{\tan(3x)}{\arctan(3x)}$; c. $f(x) = \sqrt{1-x^2} \arcsin(x)$.

6. MISCELÂNEA DE TESTES

EXERCÍCIOS

- 6.1. Considere a afirmação "Sejam f, g funções tais que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e g é limitada. Então $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = +\infty$ ".

É correto dizer que

- tal afirmação é verdadeira;
- tal afirmação é verdadeira se supomos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \neq 0$;
- tal afirmação é verdadeira se supomos que exista algum $r > 0$ tal que $|g(x)| > r$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
- tal afirmação é verdadeira supondo que exista algum $r > 0$ tal que $g(x) > r$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
- tal afirmação é falsa para toda g limitada.

- 6.2. Seja f uma função real tal que $|f(x)| \leq |\sin(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então
- f pode ser descontínua em $x = 0$;
 - f é contínua em $x = 0$, mas pode não ser derivável em $x = 0$;
 - f é derivável em $x = 0$ e $f'(0) = 0$;
 - f é derivável em $x = 0$ e $f'(0) = 1$;
 - f é derivável em $x = 0$ mas podemos apenas afirmar que $-1 \leq f'(0) \leq 1$.
- 6.3. Qual das equações abaixo é a da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \cos(x) - \tan(x)$ em $x = 0$?
- $y=1$;
 - $y=1+x$;
 - $y=1-x$;
 - $y=1+2x$;
 - $y=1-2x$.
- 6.4. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ \frac{x}{3}, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Sendo D o conjunto de descontinuidades de f então D é

- \emptyset ;
 - \mathbb{Q} ;
 - $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
 - $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
 - \mathbb{R} .
- 6.5. Dizemos que duas funções reais f e g são equivalentes se $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Indicamos isso escrevendo $f \sim g$. Qual das afirmações abaixo **NÃO** é consequência de $f \sim g$?
- $\sin(f) \sim \sin(g)$;
 - $f^2 \sim g^2$;
 - $\sqrt{f} \sim \sqrt{g}$;
 - $f + g \sim 2g$;
 - $g \sim f$.
- 6.6. Seja ABC um triângulo tal que $AB = 1$, $AC = x$, $BC = y$ e $\hat{BAC} = 120^\circ$. Quanto vale $\lim_{x \rightarrow \infty} x - y$?
- 0;
 - não existe;
 - $-\frac{1}{2}$;
 - $-\infty$;
 - $\frac{1}{2}$.
- 6.7. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$ Para quantos valores de x o gráfico de f tem reta tangente horizontal?
- Nenhum;
 - 1;
 - 2;
 - 3;
 - Infinitos.

- 6.8. (P1-2016) Seja f uma função derivável definida em um intervalo aberto centrado em $x = 0$ e dada implicitamente pela equação

$$y^3 + xy^2 + y = 2 \sin(x) + 2.$$

O valor de $f'(0)$ é

- $\frac{1}{4}$;
 - $\frac{1}{2}$;
 - $-\frac{3}{4}$;
 - $-\frac{14}{13}$;
 - $\frac{6}{13}$.
- 6.9. (P1-2016) Para que a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2+2x-3|}{x-1}, & \text{se } x < 1; \\ x+k, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

seja contínua em \mathbb{R} o valor da constante k deve ser:

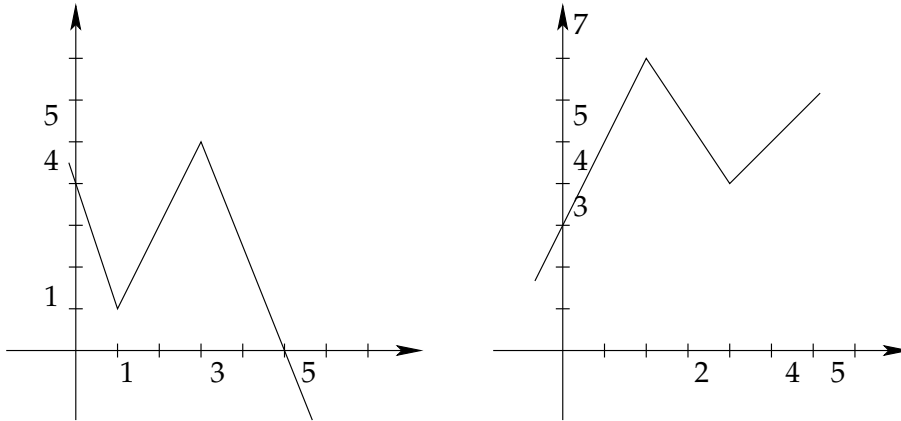
- 7;
- 1;
- 3;
- 1;
- 5.

- 6.10. (P1-2016) Dentre todas as retas tangentes ao gráfico de $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$, a única que passa pelo ponto $(1, 0)$ é
- a. $x = 1 + 4y$; b. $x = 1 - y$; c. $x = 1 + 2y$; d. $x = 1 + 3y$; e. $x = 1 + 5y$.
- 6.11. (P1-2016) Um ponto desloca-se sobre o gráfico da curva $y = \frac{1}{x}$. No instante em que ele se encontra no ponto $(2, \frac{1}{2})$, a taxa de variação de sua abscissa é $10m/s$. A taxa de variação da distância do ponto até a origem neste mesmo instante é
- a. $-\frac{1}{4}$; b. $40\sqrt{\frac{2}{17}}$; c. $\frac{75}{2\sqrt{17}}$; d. $-\frac{75}{2\sqrt{17}}$; e. $-40\sqrt{\frac{2}{17}}$.
- 6.12. (P1-2016) Considere as seguintes afirmações:
- I. Se g é limitada e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ então $\lim_{x \rightarrow +\infty} |g(x)f(x)| = +\infty$.
- II. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um função tal que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$ então f é derivável.
- III. Se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é descontínua em x_0 e limitada então $f(x) = xg(x) \sin(x)$ é derivável em $x_0 = 0$.
- São corretas
- a. nenhuma das afirmações;
- b. todas as afirmações;
- c. somente as afirmações (I) e (II);
- d. somente as afirmações (I) e (III);
- e. somente as afirmações (II) e (III).
- 6.13. (P1-2016) Os limites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{x^2}$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{x\sqrt{x} - x}$
- a. valem $-\frac{9}{2}$ e $+\infty$, respectivamente;
- b. valem $-\frac{9}{2}$ e $-\infty$, respectivamente;
- c. valem $\frac{9}{2}$ e $+\infty$, respectivamente;
- d. valem $\frac{9}{2}$ e $-\infty$, respectivamente;
- e. não existem.
- 6.14. (P1-2016) Considere a função $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 \sin(\frac{1}{|x|})}{|x|}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$. Em $x_0 = 0$ pode-se afirmar que f é
- a. descontínua;
- b. derivável e $f'(0) = 1$;
- c. contínua mas não derivável;
- d. derivável e $f'(0) = 0$;
- e. derivável e $f'(0) = -1$.
- 6.15. (Exame de Transferência - Fuvest - 2016) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(1) = -1$, $f(2) = 2$ e existe $k \in \mathbb{R}$ de modo que para todos $a > 0$ e $b > -a$ temos
- $$f(a + b) - f(a) = \frac{kb}{a^2 + ab}.$$
- Então $f'(3)$ é igual a:
- a. $1/6$; b. $1/3$; c. $1/2$; d. $2/3$; e. $5/6$.
- 6.16. (Exame de Transferência - Fuvest - 2014) Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que:
- (i) f é contínua em $x = 0$ e
- (ii) g é descontínua em $x = 0$.
- Pode-se concluir corretamente que é descontínua em $x = 0$ a função:
- a. $f + g$; b. fg ; c. $f \circ g$; d. $g \circ f$; e. $|g|$.

6.17. (Exame de Transferência - Fuvest - 2013) Considere todas as retas que são simultaneamente tangentes às parábolas $y = x^2 + 1$ e $y = -x^2 - 1$. Então o produto dos coeficientes angulares dessas retas é:

- a. $-1/4$; b. -1 ; c. $-9/4$; d. -4 ; e. $-25/4$.

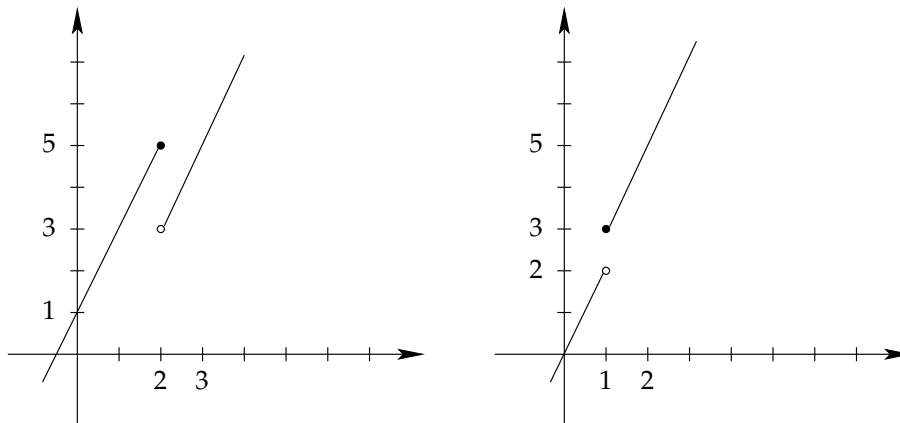
6.18. (Exame de Transferência - Fuvest - 2012) Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cujos gráficos são



Sejam $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $p(x) = f(g(x))$ e $q(x) = f(x)g(x)$. O valor $p'(1) + q'(0)$ é:

- a. -11 ; b. -6 ; c. -1 ; d. 4 ; e. 11 .

6.19. (Exame de Transferência - Fuvest - 2016) Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cujos gráficos são



Então pode-se dizer que $f \circ g$

- a. não é derivável somente em $x = 1$;
 b. não é derivável somente em $x = 2$;
 c. não é derivável somente em $x = 1$ e $x = 2$;
 d. é derivável em todos os pontos e $(f \circ g)'(1) = 2$;
 e. é derivável em todos os pontos e $(f \circ g)'(1) = 4$;

6.20. Considere a seguinte função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$

Podemos afirmar que:

- a. $\nexists f'(0)$; b. $f'(0) = -1$; c. $f'(0) = -9$; d. $f'(0) = -4$; e. $f'(0) = -2$.

RESPOSTAS

1. 1. a. $-\frac{3}{4}$; b. $\frac{1}{5}$; c. $-\frac{1}{6}$; d. 0; e. $\frac{1}{3}$;
 f. $\sqrt{2}$; g. $\frac{20}{301}$; h. 2; i. $\frac{1}{2}$; j. $\frac{1}{6}$;
 k. -1; l. -1; m. $\frac{1}{3}$; n. $-\infty$; o. 0;
 p. $\frac{1}{3}$; q. $\frac{1}{3}$; r. 0; s. $-\infty$; t. ∞ ;
 u. 0; v. $\frac{1}{3}$; w. 1; x. $-\infty$; y. $-\infty$;
 z. 3; α . $32\sqrt{2}$; β . 3; γ . 0;
 δ . $-\frac{\sqrt[4]{7}}{2}$; ϵ . $\frac{1}{2}$; ζ . $\frac{1}{3}$; η . $-\infty$.
1. 3. $c = -1$ e $L = \frac{5}{2}$.
1. 4. a. 2; b. 0; c. $+\infty$.
1. 5. a. Falsa; b. Verdadeira; c. Falsa.
1. 8. 0.
1. 9. 0 e 0.
1. 10. 1.
1. 11. (4, 0).
2. 1. a. $-\cos(2)$; b. 1.
2. 2. a. \mathbb{R} ; b. $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; c. \mathbb{R} ; d. ☺.
2. 3. a. Falsa; b. Falsa.
3. 2. Contínuas em x_0 : todas;
 Deriváveis em x_0 : c. d..
3. 4. $6 \sec^2 9$.
3. 8. $2\sqrt{a}f'(a)$.
3. 11. a. Todos; b. todos, exceto $x_0 = 0$.
3. 12. Sim, $h'(0) = 0$.

3. 14. a. V; b. F; c. V; d. F.
3. 15. $(-1, -13) : y = 16x + 3$;
 $(0, 7) : y = 16x + 7$;
 $(1, 19) : y = 16x + 3$.
3. 18. $f(-1) = 2$ e $r : y - 2 = -\frac{2}{7}(x + 1)$.
4. 1. $48\pi m^2/s$.
4. 2. $A'(t_0) = 192\pi m^2/s$ e
 $V'(t_0) = 576\pi m^3/s$.
4. 3. $\frac{5}{4} m/s$.
4. 4. $\frac{83}{14}$.
4. 5. $-1.6 cm/min$.
4. 6. $\frac{1}{40\pi} m/min$.
4. 7. $3.6 m/s$ e $0.9 m/s$.
4. 8. $\frac{-9600\pi\sqrt{3}}{13}$.
4. 9. a. $\frac{7}{12}$; b. $\frac{527}{24}$; c. $\frac{1}{12}$.
4. 10. $0.2 rad/min$; $\frac{\sqrt{3}}{10} m/min$.
4. 11. $\frac{50}{121} cm/min$.
- Testes: 6. 1. d.; 6. 2. b.; 6. 3. c.; 6. 4. d.;
 6. 5. a.; 6. 6. c.; 6. 7. e.; 6. 8. a.;
 6. 9. e.; 6. 10. c.; 6. 11. c.; 6. 12. e.;
 6. 13. b.; 6. 14. d.; 6. 15. d.;
 6. 16. a.; 6. 17. b.; 6. 18. b.;
 6. 19. e.; 6. 20. b.
-