Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
MAT–2453 (2019) — Cálculo Diferencial e Integral I (escola Politécnica)
0-ésima Lista de Exercícios - Professor: Equipe de Professores

1. Você deve ter ouvido falar que $\sqrt{2}$ é um número irracional[1].

a. Demonstre esse fato supondo tal afimação falsa, ou seja, admitindo que existem inteiros p e $q \neq 0$, primos entre si, tais que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ e portanto $2q^2 = p^2$. O que você pode dizer a respeito da paridades dos dois termos dessa igualdade?

b. Determine um número racional r, tal que $0 < \sqrt{2} - r < 10^{-5}$.

c. Prove que, se p é um número primo, então $\sqrt{p}$ é irracional.

d. Mais geralmente, prove que se $p_1, \ldots, p_k$ são primos distintos, então $\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_k}$ é irracional.

2. Resolva as inequações:

a. $x(2x-1)(x+1) > 0$ **b.** $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \leq 0$

c. $(x+1000)^2 \geq x + 1000$ **d.** $|4 - x^2| \leq \frac{x+7}{2}$

3. Decida quais afirmações são verdadeiras:

a. $x - 1 < 3 \iff (x-1)^2 < 9$ **b.** $\frac{x-1}{x-2} > 2 \iff \frac{x-2}{x-1} < \frac{1}{2}$

c. $\frac{1}{x} > 3 \iff x < \frac{1}{3}$ e $x \neq 0$ **d.** $(x^2-5)^2 < 4(x^2+1)^2 \iff x^2 - 5 < 2(x^2+1)$

e. Se $x \neq 2$ então $\frac{x^2+x+1}{x-2} > 3 \iff x^2 + x + 1 > 3(x-2)$.

4. Resolva os sistemas e interprete geometricamente:

a. $\begin{cases} xy = x \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} y^2 = x + 1 \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

5. Esboce os gráficos das funções abaixo:

a. $f(x) = |x|$ **b.** $f(x) = |x^2 - 4|$ **c.** $f(x) = |\sin x|$

d. $f(x) = x - |x|$ **e.** $f(x) = |3x - 5|$ **f.** $f(x) = 3\cos 2x$

g. $f(x) = \sqrt{x+3}$ **h.** $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **i.** $f(x) = x^3 - 9$

j. $f(x) = (x+5)^4 - 3$ **k.** $f(x) = \frac{x^3+3x^2+2x+6}{x+3}$ **l.** $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 5, & \text{se } x = 1. \end{cases}$

m. $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9} + 2$ **n.** $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **o.** $f(x) = \sqrt{-x}$

6. Resolva as seguintes inequações:

a. $|\sin x| \geq \frac{1}{2}$ **b.** $|x^2 - 4| \geq 2|x^2 - 1|$

7. Esboce (rusticamente) os gráficos de:

a. $f(x) = x \sin x$ **b.** $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ **c.** $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

d. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ **e.** $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

8. Verifique que:

a. $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$ e n um inteiro positivo.

b. $x - a = \left(\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{a}\right)\left(\sqrt[5]{x^4} + \sqrt[5]{x^3a} + \sqrt[5]{x^2a^2} + \sqrt[5]{xa^3} + \sqrt[5]{a^4}\right)$, para todos $a, x \in \mathbb{R}$.

c. $\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)x} + \sqrt[3]{x^2}\right) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

9. Complete as lacunas, usando as fatorações ilustradas no exercício acima[2]:

a. $x - 2 = (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2})(?)$; **b.** $x^2 + x = (\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2 - x + 1})(?)$; **c.** $x^4 = (\sqrt[4]{x^4+1} - 1)(?)$;

[1] Mas já se perguntou se ele realmente existe? Uma resposta está num dos textos complementares na nossa página.

[2] Esse tipo de fatoração aparecerá como uma ferramenta importante na próxima lista.