MAT–2454 — Cálculo Diferencial e Integral II — EP–USP

Prova Substitutiva — Soluções – Tipo A

Testes	Soluções
Sejam as seguintes funções: I. $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x}\cos y - \mathrm{e}^{-y}\cos x$, II. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2$, III. $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ Quais das funções acima são solução da seguinte equação diferencial $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$? **a.** Apenas I e III. **b.** Apenas II e III. **c.** Apenas III. **d.** Apenas I. **e.** Apenas II.	**1.** Derivando diretamente cada uma das funções temos que: I. $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x}\cos y - \mathrm{e}^{-y}\cos x \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$ II. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12x \neq 0.$ III. $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2}) \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$ Alternativa correta: **a.**
2. O valor de $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5y^3}{(x^6+y^4)\sin(2xy)}$ é: **a.** $1/2$; **b.** 1; **c.** 0; **d.** 2; **e.** inexistente.	**2.** $\dfrac{x^5y^3}{(x^6+y^4)\sin(2xy)} = \left(\dfrac{x^3y^2}{x^6+y^4}\right)\left(\dfrac{x}{2}\right)\left(\dfrac{2xy}{\sin(2xy)}\right)$, temos um produto onde o primeiro fator é limitado, o segundo tende a zero e o teceiro tende a 1 (via limite fundamental). Assim, temos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5y^3}{(x^6+y^4)\sin(2xy)} = 0.$ Alternativa correta: **c.**
3. O valor da constante c tal que, para qualquer ponto da interseção das esferas $(x-c)^2 + y^2 + z^2 = 3$ e $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$ os correspondentes planos tangentes sejam ortogonais é **a.** 2; **b.** $\sqrt{3}$; **c.** $\sqrt{2}$; **d.** 0; **e.** 3.	**3.** Consideremos as funções de classe $\mathcal{C}^\infty$ $f(x,y,z) = (x-c)^2 + y^2 + z^2$ e $g(x,y,z) = x^2 + (y-1)^2 + z^2$. Seja (x_0,y_0,z_0) um ponto na intersecção das superfícies de nível $f(x,y,z) = 3$ e $g(x,y,z) = 1$. Para que os respectivos planos tangentes às esferas sejam ortogonais no ponto (x_0,y_0,z_0) devemos ter que $\nabla f(x_0,y_0,z_0) \perp \nabla g(x_0,y_0,z_0)$. Assim, o ponto (x_0,y_0,z_0) deve satisfazer as seguintes equações 1. $(x_0-c)x_0 + y_0(y_0-1) + z_0^2 = 0 \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = cx_0 + y_0$, 2. $(x_0-c)^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3 \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3 + 2cx_0 - c^2$ e 3. $x_0^2 + (y_0-1)^2 + z_0^2 = 1 \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 2y_0$, donde obtemos, primeiramente, $y_0 = cx_0$ e portanto $c^2 = 3$. Alternativa correta: **b.**
4. O valores de a para que a função $f(x,y) = 2a^2x^4 + ay^2 - 4x^2 - 2ay$ tenha exatamente 1 ponto de sela e 2 mínimos locais são: **a.** $a < 0$; **b.** $a = 0$; **c.** $a \geq 0$; **d.** $a > 0$; **e.** inexistentes.	**4.** Com $a = 0$ obtemos $f(x,y) = -4x^2$ e assim f tem infinitos pontos de máximo e nenhum ponto de sela. Portanto $a \neq 0$. Assim, os pontos críticos de f são soluções de $\nabla f = (0,0)$, ou seja, do sistema $\begin{cases} 8a^2x^3 - 8x &= 0 \\ 2ay - 2a &= 0 \end{cases}$. Assim, os pontos críticos de f são $P_1 = (0,1), P_2 = (1/a, 1)$ e $P_3 = (-1/a, 1)$. Para classificar esses pontos críticos devemos calcular $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ e o Hessiano $H(x,y)$ de f em cada um deles, obtendo $H(0,1) = -16a$, $H(1/a, 1) = 32a$ e $H(-1/a, 1) = 32a$. Portanto, para ter exatamente um ponto de sela e dois mínimos locais é necessário que $a > 0$. Alternativa correta: **d.**

Questão 1 (Valor: 2.0 pontos)**.** Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ k, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a. Existe $k \in \mathbb{R}$ para que f seja contínua em $(0,0)$? Caso afirmativo determine k. Justifique a sua resposta.
b. Existe $k \in \mathbb{R}$ para que f seja diferenciável em $(0,0)$? Caso afirmativo determine k. Justifique a sua resposta.

Solução.
a. Observemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y.\frac{x^2y^2}{x^4+y^4} = 0,$$

pois $y \to 0$ quando $(x,y) \to (0,0)$ e a função $\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ é limitada. De fato, se $(x,y) \neq (0,0)$, temos

$$0 \leq (x^2-y^2)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 \Rightarrow 0 \leq x^2y^2 \leq \frac{1}{2}(x^4+y^4) \Rightarrow 0 \leq \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} \leq \frac{1}{2}.$$

Logo para que f seja contínua em $(0,0)$, o valor de k deve ser igual a 0.
b. Não existe k tal que f seja diferenciável em $(0,0)$. Pelo ítem anterior, se f fosse diferenciável em $(0,0)$, o valor de $f(0,0)$ deve ser igual a 0. Primeiro notemos que as derivadas parciais de f em (0,0) existem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Vejamos, porém, que f não é diferenciável em $(0,0)$:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k^3}{(h^4+k^4)\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Considerando a curva parametrizada por $\gamma(t) = (t,t)$, $t \in \mathbb{R}$, temos que $\gamma(t) = (0,0)$ e o limite se reduz a

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2t^3}{(t^4+t^4)\sqrt{t^2+t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{t^5}{(2t^4)\sqrt{2t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{2\sqrt{2}|t|}.$$

Esse limite não existe porque seus limites laterais não são iguais.

Questão 2 (Valor: 2.0 pontos). Seja $f = f(x,y)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ e seja $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(u,v) = uf(u^2 + 2uv, v^2 - 2uv).$$

Calcule $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(1,1)$, sabendo que

- $x - 3y + 2z - 8 = 0$ é uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(3,-1,f(3,-1))$;
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3,-1) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,-1) = 1$ e
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3,-1) = -1$.

Solução. Consideremos $X(u,v) = u^2 + 2uv$ e $Y(u,v) = v^2 - 2uv$. Assim, $g(u,v) = uf(X(u,v),Y(u,v))$. Pela regra da cadeia obtemos:

$$g_v(u,v) = u\left(f_x(X(u,v),Y(u,v))X_v(u,v) + f_y(X(u,v),Y(u,v))Y_v(u,v)\right).$$

Derivando, agora em relação a u,

$$\begin{aligned} g_{uv}(u,v) = {} & f_x(X(u,v),Y(u,v))X_v(u,v) + f_y(X(u,v),Y(u,v))Y_v(u,v) \\ & + uX_v(u,v)[f_{xx}(X(u,v),Y(u,v))X_u(u,v) + f_{yx}(X(u,v),Y(u,v))Y_u(u,v)] \\ & + uf_x(X(u,v),Y(u,v))X_{uv}(u,v) \\ & + uY_v(u,v)[f_{xy}(X(u,v),Y(u,v))X_u(u,v) + f_{yy}(X(u,v),Y(u,v))Y_u(u,v)] \\ & + uf_y(X(u,v),Y(u,v))Y_{uv}(u,v). \end{aligned}$$

Por hipótese, $f_x(3,-1) = -1/2$ e $f_y(3,-1) = 3/2$. Por outro lado, $X_u(3,-1) = 4$, $X_v(3,-1) = 2$, $Y_u(3,-1) = -1$, $Y_v(3,-1) = 0$, $X_{uv}(3,-1) = Y_{uv}(3,-1) = -2$. Substituindo, obtemos $g_{uv}(1,1) = 1$.

Questão 3 (Valor: 2.0 pontos)**.** Determine o volume mínimo do sólido limitado pelos planos $x = 0, y = 0, z = 0$ e um plano que é tangente ao elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + z^2 = 1$$

em um ponto do octante $x > 0, y > 0$ e $z > 0$.

Solução. A equação do plano tangente ao elipsoide num ponto (u, v, w) é

$$(x-u)\frac{u}{2} + (y-v)\frac{2v}{3} + (z-w)2w = 0$$

Logo, os pontos de interseção deste plano tangente com os eixos coordenandos são

- Interseção com eixo X no ponto $(\frac{4}{u}, 0, 0)$,
- Interseção com eixo Y no ponto $(0, \frac{3}{v}, 0)$,
- Interseção com eixo Z no ponto $(0, 0, \frac{1}{w})$

Observe que o sólido determinado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e o plano tangente ao elipsoide no ponto (u, v, w) é uma piramide cujo volume é

$$f(u, v, w) = \frac{2}{uvw}$$

Observe que o domínio de f são os pontos satisfazendo $u > 0$, $v > 0$ e $w > 0$. Precisamos determinar o valor mínimo de f sujeita à restrição $\frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{3} + w^2 = 1$. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, os candidatos a extremantes locais tornam compatível o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\dfrac{2}{u^2vw} & = \dfrac{\lambda u}{2} \\ -\dfrac{2}{uv^2w} & = \dfrac{2\lambda u}{3} \\ -\dfrac{2}{uvw^2} & = 2\lambda w \\ \dfrac{u^2}{4} + \dfrac{v^2}{3} + w^2 & = 1 \end{cases}$$

A única solução desse sistema é $u = 2/\sqrt{3}$, $v = 1$, $w = 1/\sqrt{3}$ e $\lambda = -9/2$. Ora, observe que a função f cresce quando nos aproximamos à origem, em particular f é ilimitada superiormente. Por isto, o ponto $(2/\sqrt{3}, 1, 1/\sqrt{3})$ é o ponto de mínimo absoluto com valor mínimo absoluto $f(2/\sqrt{3}, 1, 1/\sqrt{3}) = 3$.