CATALOG

MAT–2454 — Cálculo Diferencial e Integral II — EP–USP

Terceira Prova — 26/11/2018

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Carteiras, mochilas e blusas devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha à tinta, e de maneira legível, todos os campos acima.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 10h40min.
4. As questões dissertativas podem ser feitas à tinta (azul ou preta) ou à lápis.
5. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho. Só será considerado na correção das questões dissertativas o que estiver na folha com seu enunciado.
6. Mantenha a organização, limpeza e legibilidade na redação das questões dissertativas, **justificando todas as suas afirmações**.
7. Preencha, à tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina) e para as alternativas de cada teste. **Evite erros nesse momento**.
8. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
9. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
10. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

QUESTÕES DISSERTATIVAS	
QUESTÃO 1	QUESTÃO 2

Teste 1 [`afirms1`] Considere as seguintes afirmações:

(I) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável que possui um único ponto crítico. Se este ponto crítico é um extremante local de f, então é extremante global de f.

(II) Considere as curvas $\alpha(t) = (t, 0, t^2)$ e $\beta(t) = (0, t, -t^2), t \in \mathbb{R}$. Se as imagens de α e de β estão contidas no gráfico de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(0,0)$ é um ponto crítico de f, então $(0,0)$ é ponto de sela de f.

(III) Se A é um subconjunto não-vazio e limitado de $\mathbb{R}^2$ e $f : A \to \mathbb{R}$ é contínua, então f é limitada em A.

Assinale a alternativa correta:

■ Somente a afirmação (II) é verdadeira.
[B] Somente as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
[C] Somente a afirmação (I) é verdadeira.
[D] Somente as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
[E] Somente a afirmação (III) é verdadeira.

Solução:

(I) Falsa. Para um contraexemplo vide exercício 5.2 da lista 3.

(II) Verdadeira. Ao longo do eixo Ox o ponto $(0,0)$ é um mínimo local e na direção do eixo Oy este ponto é de máximo local.

(III) Falsa. Considere $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, que é limitado e não-vazio, e a função nele definida dada por $f(x,y) = 1/(x^2+y^2-1)$, que é contínua, mas não limitada em A.

Teste 2 [`ptoscriticos1`] Seja $f(x,y) = x^3y^2 + ax^2 + bx$, onde a, b são constantes reais. Assinale a alternativa cujos valores de a e b fazem do ponto $P = (1,0)$ um ponto de mínimo local f.

■ $a > 0$ e $b = -2a$.
[B] $a < 0$ e $b = 2a$.
[C] $a < 0$ e $b = -2a$.
[D] $a > 0$ e $b = 2a$.
[E] $a > 0$ e $a = 2b$.

Solução: Cálculos diretos mostram que $\nabla f(1,0) = (0,0) \iff b = -2a$, $f_{xx}(1,0) = 2a$ e $H_f(1,0) = 4a$, o que faz $(1,0)$ ser mínimo local quando $a > 0$.

Teste 3 [`ptoscriticos2`] Seja $f(x,y) = x^3y^2 + ax^2 + bx$, onde a, b são constantes reais. Assinale a alternativa cujos valores de a e b fazem do ponto $P = (-1,0)$ um ponto de máximo local de f.

■ $a < 0$ e $b = 2a$.
[B] $a > 0$ e $b = -2a$.
[C] $a < 0$ e $b = -2a$.
[D] $a > 0$ e $b = 2a$.
[E] $a < 0$ e $a = 2b$.

Solução: Cálculos diretos mostram que $\nabla f(-1,0) = (0,0) \iff b = 2a$, $f_{xx}(-1,0) = 2a$ e $H_f(-1,0) = -4a$, o que faz $(-1,0)$ ser mínimo local quando $a < 0$.

Teste 4 [`ptoscriticos3`] Seja $f(x,y) = x^3y^2 + ax^2 + bx$, onde a, b são constantes reais. Assinale a alternativa cujos valores de a e b fazem do ponto $P = (1,0)$ um ponto de sela de f.

■ $a < 0$ e $b = -2a$.
[B] $a > 0$ e $b = -2a$.
[C] $a < 0$ e $b = 2a$.
[D] $a > 0$ e $b = 2a$.
[E] $a < 0$ e $a = 2b$.

Solução: Cálculos diretos mostram que $\nabla f(1,0) = (0,0) \iff b = -2a$, $H_f(1,0) = 4a$, o que faz $(1,0)$ ser sela quando $a < 0$.

Teste 5 [`ptoscriticos4`] Seja $f(x,y) = x^3y^2 + ax^2 + bx$, onde a, b são constantes reais. Assinale a alternativa cujos valores de a e b fazem do ponto $P = (-1,0)$ um ponto de sela de f.

■ $a > 0$ e $b = 2a$.
[B] $a > 0$ e $b = -2a$.
[C] $a < 0$ e $b = 2a$.
[D] $a < 0$ e $b = -2a$.
[E] $a > 0$ e $a = 2b$.

Solução: Cálculos diretos mostram que $\nabla f(-1,0) = (0,0) \iff b = 2a$, $f_{xx}(-1,0) = 2a$ e $H_f(-1,0) = -4a$, o que faz $(1,0)$ ser sela quando $a > 0$.

Teste 6 [`lagrange311`] A soma das coordenadas do ponto da superfície $z^2 - xy = 1$, pertencente ao semiespaço superior e mais próximo da origem, é:

■ 1.   [B] 2.   [C] 3.   [D] 4.   [E] 5.

Solução: Queremos minimizar a função $h(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ou equivalentemente $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeito a $g^{-1}(0)$, onde $g(x,y,z) = z^2 - xy - 1$ e $z > 0$. Em tais pontos de mínimo devemos ter que $\{\nabla f, \nabla g\}$ é linearmente dependente, isto é, $\nabla f \wedge \nabla g = (0,0,0)$, o que nos dá o sistema

$$\begin{cases} -z(x+2y) & = 0 \\ -z(y+2x) & = 0 \\ x^2 - y^2 & = 0 \\ z^2 - xy & = 1 \end{cases},$$

cujas soluções são $(0,0,\pm 1)$. A única pertencente ao semiespaço superior tem a soma das coordenadas igual a 1.

Teste 7 [`lagrange312`] A soma das coordenadas do ponto da superfície $z^2 - xy = 4$, pertencente ao semiespaço superior e mais próximo da origem, é:

■ 2.   [B] 1.   [C] 3.   [D] 4.   [E] 5.

Solução: Queremos minimizar a função $h(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ou equivalentemente $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, sujeito a $g^{-1}(0)$, onde $g(x,y,z) = z^2 - xy - 4$ e $z > 0$. Em tais pontos de mínimo devemos ter que $\{\nabla f, \nabla g\}$ é linearmente dependente, isto é, $\nabla f \wedge \nabla g = (0,0,0)$, o que nos dá o sistema

$$\begin{cases} -z(x+2y) & = 0 \\ -z(y+2x) & = 0 \\ x^2 - y^2 & = 0 \\ z^2 - xy & = 4 \end{cases},$$

cujas soluções são $(0,0,\pm 2)$. A única pertencente ao semiespaço superior tem a soma das coordenadas igual a 2.

Teste 8 [`lagrange313`] A soma das coordenadas do ponto da superfície $z^2 - xy = 9$, pertencente ao semiespaço superior e mais próximo da origem, é:

■ 3.   [B] 1.   [C] 2.   [D] 4.   [E] 5.

Solução: Queremos minimizar a função $h(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ou equivalentemente $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, sujeito a $g^{-1}(0)$, onde $g(x,y,z) = z^2 - xy - 9$ e $z > 0$. Em tais pontos de mínimo devemos ter que $\{\nabla f, \nabla g\}$ é linearmente dependente, isto é, $\nabla f \wedge \nabla g = (0,0,0)$, o que nos dá o sistema

$$\begin{cases} -z(x+2y) & = 0 \\ -z(y+2x) & = 0 \\ x^2 - y^2 & = 0 \\ z^2 - xy & = 9 \end{cases},$$

cujas soluções são $(0,0,\pm 3)$. A única pertencente ao semiespaço superior tem a soma das coordenadas igual a 3.

Teste 9 [`lagrange314`] A soma das coordenadas do ponto da superfície $z^2 - xy = 16$, pertencente ao semiespaço e mais próximo da origem, é:

■ 4.   [B] 3.   [C] 1.   [D] 2.   [E] 5.

Solução: Queremos minimizar a função $h(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ou equivalentemente $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, sujeito a $g^{-1}(0)$, onde $g(x,y,z) = z^2 - xy - 16$ e $z > 0$. Em tais pontos de mínimo devemos ter que $\{\nabla f, \nabla g\}$ é linearmente dependente, isto é, $\nabla f \wedge \nabla g = (0,0,0)$, o que nos dá o sistema

$$\begin{cases} -z(x+2y) & = 0 \\ -z(y+2x) & = 0 \\ x^2 - y^2 & = 0 \\ z^2 - xy & = 16 \end{cases},$$

cujas soluções são $(0,0,\pm 4)$. A única pertencente ao semiespaço superior tem a soma das coordenadas igual a 4.

Teste 10 [pltan1] Seja $f = f(x,y)$ uma função diferenciável cujo gráfico está contido na superfície
$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$. Se $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}$, então o plano tangente ao gráfico de f em $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ é:

■ $x + \sqrt{2}y + \sqrt{6}z - 2 = 0$.

[B] $x + \sqrt{2}y - \sqrt{6}z = 0$.

[C] $-x - \sqrt{2}y + \sqrt{6}z + 2 = 0$.

[D] $x + \sqrt{2}y + \sqrt{6}z + 2 = 0$.

[E] $2x - \sqrt{6}z = 0$.

Solução: Se $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é diferenciável, como é o caso, a equação do plano tangente a $g^{-1}(0)$ em (x_0, y_0, z_0) pode ser escrita como $\langle \nabla g(x_0, y_0, z_0), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0$. Neste caso temos $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1$ e $(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, donde a equação fica $x + \sqrt{2}y + \sqrt{6}z - 2 = 0$.

Teste 11 [pltan2] Seja $f = f(x,y)$ uma função diferenciável cujo gráfico está contido na superfície
$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$. Se $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, então o plano tangente ao gráfico de f em $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ é:

■ $x + \sqrt{2}y - \sqrt{6}z - 2 = 0$.

[B] $x + \sqrt{2}y + \sqrt{6}z = 0$.

[C] $-x - \sqrt{2}y + \sqrt{6}z - 2 = 0$.

[D] $x + \sqrt{2}y + \sqrt{6}z - 2 = 0$.

[E] $2x + \sqrt{6}z = 0$.

Solução: Se $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é diferenciável, como é o caso, a equação do plano tangente a $g^{-1}(0)$ em (x_0, y_0, z_0) pode ser escrita como $\langle \nabla g(x_0, y_0, z_0), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0$. Neste caso temos $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1$ e $(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, donde a equação fica $x + \sqrt{2}y - \sqrt{6}z - 2 = 0$.

Teste 12 [pltan3] Seja $f = f(x,y)$ uma função diferenciável cujo gráfico está contido na superfície
$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$. Se $f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}$, então o plano tangente ao gráfico de f em $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ é:

■ $-x - \sqrt{2}y + \sqrt{6}z - 2 = 0$.

[B] $x + \sqrt{2}y + \sqrt{6}z = 0$.

[C] $x + \sqrt{2}y - \sqrt{6}z - 2 = 0$.

[D] $-x - \sqrt{2}y + \sqrt{6}z + 2 = 0$.

[E] $2x + \sqrt{6}z = 0$.

Solução: Se $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é diferenciável, como é o caso, a equação do plano tangente a $g^{-1}(0)$ em (x_0, y_0, z_0) pode ser escrita como $\langle \nabla g(x_0, y_0, z_0), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0$. Neste caso temos $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1$ e $(x_0, y_0, z_0) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, donde a equação fica $-x - \sqrt{2}y + \sqrt{6}z - 2 = 0$.

Teste 13 [pltan4] Seja $f = f(x, y)$ uma função diferenciável cujo gráfico está contido na superfície $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$. Se $f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, então o plano tangente ao gráfico de f em $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ é:

■ $x + \sqrt{2}y + \sqrt{6}z + 2 = 0$.

[B] $x + \sqrt{2}y - \sqrt{6}z = 0$.

[C] $x + \sqrt{2}y + \sqrt{6}z - 2 = 0$.

[D] $-x - \sqrt{2}y + \sqrt{6}z + 2 = 0$.

[E] $2x - \sqrt{6}z = 0$.

Solução: Se $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é diferenciável, como é o caso, a equação do plano tangente a $g^{-1}(0)$ em (x_0, y_0, z_0) pode ser escrita como $\langle \nabla g(x_0, y_0, z_0), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0$. Neste caso temos $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1$ e $(x_0, y_0, z_0) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, donde a equação fica $x + \sqrt{2}y + \sqrt{6}z + 2 = 0$.

Teste 14 [intersup1] Um ponto no qual a curva dada pela intersecção das superfícies $x^2 - 2xy - 2y + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ tem direção tangente paralela ao eixo Ox é:

■ $(0, 0, 1)$. [B] $(-1, 0, 0)$. [C] $(1, 0, 0)$. [D] $(\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2)$. [E] inexistente.

Solução: No ponto procurado o vetor tangente deve ser não nulo e paralelo a $\nabla f \wedge \nabla g$, onde $f(x, y, z) = x^2 - 2xy - 2y + z^2 - 1$ e $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Deste modo, para ser paralelo ao eixo Ox suas duas últimas coordenadas devem ser nulas, ou seja,

$$\begin{cases} yz &= 0 \\ x^2 + xy + x - y^2 &= 0 \end{cases}$$

Se $y = 0$ temos $x = 0$ (e portanto $z = \pm 1$) ou $x = -1$ (e portanto $z = 0$). O ponto $(-1, 0, 0)$ é tal que os gradientes de f e g são paralelos e portanto seu produto vetorial dá o vetor nulo, que não define uma direção em $\mathbb{R}^3$. Com isso resta o ponto $(0, 0, 1)$. Com a terceira coordenada nula só resta a alternativa com o ponto $(1, 0, 0)$, que torna inviável a segunda equação do sistema acima.

Teste 15 [intersup2] Um ponto no qual a curva dada pela intersecção das superfícies $y^2 - 2xy - 2x + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ tem direção tangente paralela ao eixo Oy é:

■ $(0, 0, -1)$. [B] $(0, -1, 0)$. [C] $(0, 1, 0)$. [D] $(0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$. [E] inexistente.

Solução: No ponto procurado o vetor tangente deve ser não nulo e paralelo a $\nabla f \wedge \nabla g$, onde $f(x, y, z) = y^2 - 2xy - 2x + z^2 - 1$ e $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Deste modo, para ser paralelo ao eixo Oy suas primeira e terceira coordenadas devem ser nulas, ou seja,

$$\begin{cases} xz &= 0 \\ x^2 - xy - y - y^2 &= 0 \end{cases}$$

Se $x = 0$ temos $y = 0$ (e portanto $z = \pm 1$) ou $y = -1$ (e portanto $z = 0$). O ponto $(0, -1, 0)$ é tal que os gradientes de f e g são paralelos e portanto seu produto vetorial dá o vetor nulo, que não define uma direção em $\mathbb{R}^3$. Com isso resta o ponto $(0, 0, -1)$. Com a terceira coordenada nula só resta a alternativa com o ponto $(0, 1, 0)$, que torna inviável a segunda equação do sistema acima.

Questão 1 (Valor: 2.5 pontos)**.** Seja $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1 \text{ e } x^2+y^2 = 4\}$. Usando o método dos Multiplicadores de Lagrange para funções de 3 variáveis, determine os pontos de C mais próximos da origem.

Solução: O conjunto C é a inteserção das superfícies de nível 0 das funções $g(x,y,z) = xyz - 1$ e $h(x,y,z) = x^2+y^2-4$. Queremos encontrar o ponto de C com a menor distância em relação à origem, o que equivale a minimizar $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ sobre C. Uma condição necessária para isso é que $\{\nabla f, \nabla g, \nabla h\}$ seja linearmente dependente em tais pontos, ou ainda, que o produto misto desses vetores é nulo. Como $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$, $\nabla g = (yz, xz, xy)$ e $\nabla h = (2x, 2y, 0)$ isso equivale a

$$\det \begin{bmatrix} x & y & z \\ yz & xz & xy \\ x & y & 0 \end{bmatrix} = 0 \iff z^2(x^2-y^2) = 0.$$

Esta equação, junto com as restrições que definem C, obtemos o sistema

$$\begin{cases} z^2(x^2-y^2) & = 0 \\ xyz & = 1 \\ x^2+y^2 & = 4, \end{cases}$$

cujas soluções são $x = y = \pm\sqrt{2}, z = 1/2$ e $x = -y = \pm\sqrt{2}, z = -1/2$. Deste modo, os pontos procurados são $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1/2)$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1/2)$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -1/2)$ e $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -1/2)$.

Tais pontos são de fato onde a função f atinge seu menor valor pois interceptando C, que não é compacto (ilimitado), com qualquer bola B, centrada na origem e de raio maior que $\sqrt{17}/4$, temos o compacto $B \cap C$ contido em C, onde f assume então valores máximo e mínimo. Denotando por ∂B a fronteira de B (uma esfera) e $\mathrm{int}B$ seu interior, temos que o valor de f em $\partial B \cap C$ é maior que os assumidos em $\mathrm{int}B \cap C$, sendo portanto os pontos de máximo e então os pontos acima encontrados são os de mínimo de f sobre C.

$\square$

Questão 2 (Valor: 2.5 pontos). Seja $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1 \text{ e } x^2+y^2 = 1\}$. Usando o método dos Multiplicadores de Lagrange para funções de 3 variáveis, determine os pontos de C mais próximos da origem.

Solução: O conjunto C é a inteserção das superfícies de nível 0 das funções $g(x,y,z) = xyz - 1$ e $h(x,y,z) = x^2+y^2-1$. Queremos encontrar o ponto de C com a menor distância em relação à origem, o que equivale a minimizar $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ sobre C. Uma condição necessária para isso é que $\{\nabla f, \nabla g, \nabla h\}$ seja linearmente dependente em tais pontos, ou ainda, que o produto misto desses vetores é nulo. Como $\nabla f = (2x,2y,2z)$, $\nabla g = (yz,xz,xy)$ e $\nabla h = (2x,2y,0)$ isso equivale a

$$\det \begin{bmatrix} x & y & z \\ yz & xz & xy \\ x & y & 0 \end{bmatrix} = 0 \iff z^2(x^2-y^2) = 0.$$

Esta equação, junto com as restrições que definem C, obtemos o sistema

$$\begin{cases} z^2(x^2-y^2) & = 0 \\ xyz & = 1 \\ x^2+y^2 & = 1, \end{cases}$$

cujas soluções são $x = y = \pm\sqrt{2}/2, z = 2$ e $x = -y = \pm\sqrt{2}/2, z = -2$. Deste modo, os pontos procurados são $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 2)$, $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 2)$, $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, -2)$ e $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, -2)$

Tais pontos são de fato onde a função f atinge seu menor valor pois interceptando C, que não é compacto (ilimitado), com qualquer bola B, centrada na origem e de raio maior que $\sqrt{5}$, temos o compacto $B \cap C$ contido em C, onde f assume então valores máximo e mínimo. Denotando por ∂B a fronteira de B (uma esfera) e $\text{int}B$ seu interior, temos que o valor de f em $\partial B \cap C$ é maior que os assumidos em $\text{int}B \cap C$, sendo portanto os pontos de máximo e então os pontos acima encontrados são os de mínimo de f sobre C.

$\square$

Questão 3 (Valor: 2.5 pontos)**.** Considere o quadrado $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq 2\}$ e a função $f(x,y) = {}^{x^3}/_3 - xy + {}^{y^3}/_3$, definida em R.

a. Determine os valores máximo e mínimo de f na fronteira de R.

b. Determine os valores máximo e mínimo de f em R.

Solução:

a. A fronteira de R consiste dos quatro segmentos segmentos de reta que podem ser parametrizados facilmente. Já compondo com f temos:

- $g_1(t) = f(t,0) = {}^{t^3}/_3, 0 \leq t \leq 2$, que assume máximo em $t = 2$, $f(2,0) = {}^8/_3$, e mínimo em $t = 0$, $f(0,0) = 0$, pois é estritamente crescente.
- $g_2(t) = f(0,t) = g_1(t)$ se analisa de modo análogo.
- $g_3(t) = f(t,2) = {}^{t^3}/_3 - 2t + {}^8/_3, 0 \leq t \leq 2$, que tem $t = \sqrt{2}$ como ponto crítico, onde $f(\sqrt{2},2) = (8 - 4\sqrt{2})/3$. Nos extremos temos $t = 0$, com $f(0,2) = {}^8/_3$ e $t = 2$, $f(2,2) = {}^4/_3$.
- $g_4(t) = f(2,t) = g_3(t)$ se analisa de modo análogo.

b. Aqui precisamos considerar os pontos interiores de R e os candidatos são os pontos onde $\nabla f = (x^2 - y, y^2 - x)$ se anula, ou seja, em $(1,1)$ (único no interior de R), onde temos $f(1,1) = -{}^1/_3$.

Deste modo o valor máximo de f é ${}^8/_3$ e o mínimo é $-{}^1/_3$.

□

Questão 4 (Valor: 2.5 pontos)**.** Considere o quadrado $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 4 \text{ e } 0 \leq y \leq 4\}$ e a função $f(x, y) = x^3/3 - 2xy + y^3/3$, definida em R.

a. Determine os valores máximo e mínimo de f na fronteira de R.

b. Determine os valores máximo e mínimo de f em R.

Solução:

a. A fronteira de R consiste dos quatro segmentos segmentos de reta que podem ser parametrizados facilmente. Já compondo com f temos:

- $g_1(t) = f(t, 0) = t^3/3, 0 \leq t \leq 4$, que assume máximo em $t = 4$, $f(4, 0) = 64/3$, e mínimo em $t = 0$, $f(0, 0) = 0$, pois é estritamente crescente.
- $g_2(t) = f(0, t) = g_1(t)$ se analisa de modo análogo.
- $g_3(t) = f(t, 4) = t^3/3 - 8t + 64/3, 0 \leq t \leq 4$, que tem $t = 2\sqrt{2}$ como ponto crítico, onde $f(2\sqrt{2}, 4) = 32/3(2 - \sqrt{2})$. Nos extremos temos $t = 0$, com $f(0, 4) = 64/3$ e $t = 4$, $f(4, 4) = 32/3$.
- $g_4(t) = f(2, t) = g_3(t)$ se analisa de modo análogo.

b. Aqui precisamos considerar os pontos interiores de R e os candidatos são os pontos onde $\nabla f = (x^2 - 2y, y^2 - 2x)$ se anula, ou seja, em $(2, 2)$ (único no interior de R), onde temos $f(2, 2) = -8/3$.

Deste modo o valor máximo de f é $64/3$ e o mínimo é $-8/3$.

$\square$