CATALOG

MAT–2454 — Cálculo Diferencial e Integral II — EP–USP

Segunda Prova — 15/10/2018

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Carteiras, mochilas e blusas devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha à tinta, e de maneira legível, todos os campos acima.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 10h40min.
4. As questões dissertativas podem ser feitas à tinta (azul ou preta) ou à lápis.
5. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho. Só será considerado na correção das questões dissertativas o que estiver na folha com seu enunciado.
6. Mantenha a organização, limpeza e legibilidade na redação das questões dissertativas, **justificando todas as suas afirmações**.
7. Preencha, à tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina) e para as alternativas de cada teste. **Evite erros nesse momento**.
8. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
9. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
10. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 [`afirms1`] Considere as seguintes afirmações

I. Se $f(x,y)$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-3) < 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-3) < 0$, então $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,-3) < 0$ para todo vetor unitário $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$.

II. Existe uma função diferenciável $f(x,y)$ em $\mathbb{R}^2$ tal que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,2,0)$ é $z = x + 2y - 5$

III. Existe uma função $f(x,y)$ de classe C^2 tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x + 3$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 5x - y$.

IV. Seja $f(x,y)$ diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e considere os vetores unitários $\vec{u} = \left(1/2, \sqrt{3}/2\right)$ e $\vec{v} = \left(-\sqrt{3}/2, 1/2\right)$. Então para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}\vec{u} + \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}\vec{v}$.

V. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tem derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$ para todo vetor uniário $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, então f é diferenciável em $(0,0)$.

Assinale a alternativa correta:

- ■ Apenas as afirmações II e IV são verdadeiras.
- B Apenas as afirmações II e III são verdadeiras.
- C Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.
- D Apenas as afirmações I e V são falsas.
- E Apenas as afirmações III, IV e V são falsas.

Solução:

I. *falsa*, pois se $\vec{u}$ é unitário e tem as duas coordenadas negativas então $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,-3) = \langle \nabla f(1,-3), \vec{u} \rangle > 0$.

II. *verdadeira*, basta tomar $f(x,y) = x + 2y - 5$.

III. *falsa*, pois nesse caso teríamos $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0 \neq 5 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 5$, donde tal f não poderia ser de classe C^2.

IV. *verdadeira*, pois $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ e ao escrever $\nabla f = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ temos $\alpha = \langle \nabla f, \vec{u} \rangle$ e $\beta = \langle \nabla f, \vec{v} \rangle$.

V. *falsa*, basta considerar a função do exercício 5.3 da Lista 2.

Teste 2 [`afirms2`] Considere as seguintes afirmações

I. Existe uma função diferenciável $f(x, y)$ em $\mathbb{R}^2$ tal que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 2, 0)$ é $z = x + 2y - 5$

II. Se $f(x, y)$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, -3) < 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, -3) < 0$, então $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, -3) < 0$ para todo vetor unitário $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$.

III. Seja $f(x, y)$ diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e considere os vetores unitários $\vec{u} = \left(1/2, \sqrt{3}/2\right)$ e $\vec{v} = \left(-\sqrt{3}/2, 1/2\right)$. Então para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}\vec{u} + \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}\vec{v}$.

IV. Existe uma função $f(x, y)$ de classe C^2 tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x + 3$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 5x - y$.

V. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tem derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0)$ para todo vetor uniário $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, então f é diferenciável em $(0, 0)$.

Assinale a alternativa correta:

■ Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.

B Apenas as afirmações II e IV são verdadeiras.

C Apenas as afirmações II e III são verdadeiras.

D Apenas as afirmações I e V são falsas.

E Apenas as afirmações III, IV e V são falsas.

Solução:

I. *verdadeira*, basta tomar $f(x, y) = x + 2y - 5$.

II. *falsa*, pois se $\vec{u}$ é unitário e tem as duas coordenadas negativas então $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, -3) = \langle \nabla f(1, -3), \vec{u} \rangle > 0$.

III. *verdadeira*, pois $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ e ao escrever $\nabla f = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ temos $\alpha = \langle \nabla f, \vec{u} \rangle$ e $\beta = \langle \nabla f, \vec{v} \rangle$.

IV. *falsa*, pois nesse caso teríamos $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0 \neq 5 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 5$, donde tal f não poderia ser de classe C^2.

V. *falsa*, basta considerar a função do exercício 5.3 da Lista 2.

Teste 3 [pltg1] Qual das seguintes curvas está contida no plano tangente à superfície $z = \sqrt{1+2x^2+y^2}$ no ponto $(1,1,2)$?

- ■ $\gamma(t) = (t, 2t+1, 2t)$
- ■ $\gamma(t) = \left(t, t, \sqrt{1+3t^2}\right)$
- ■ $\gamma(t) = (2t+1, t+2, -2t)$
- ■ $\gamma(t) = \left(3t-2, 2t-1, 2t^2\right)$
- ■ $\gamma(t) = (3t+1, t+1, 3t+3)$

Solução: Aqui temos $z_x(1,1) = 1$ e $z_y(1,1) = 1/2$. A equação do plano tangente é $\pi\colon 2x + y - 2z + 1 = 0$. Como nenhuma das curvas está contida nesse plano todas as alternativas serão consideradas corretas.

Teste 4 [pltg2] Qual das seguintes curvas está contida no plano tangente à superfície $z = \sqrt{1+x^2+2y^2}$ no ponto $(1,1,2)$?

- ■ $\gamma(t) = (2t+1, t, 2t)$
- ■ $\gamma(t) = \left(t, t, \sqrt{1+3t^2}\right)$
- ■ $\gamma(t) = (t+2, 2t+1, -2t)$
- ■ $\gamma(t) = \left(2t-1, 3t-2, t^2\right)$
- ■ $\gamma(t) = (t+1, 3t+1, 3t+3)$

Solução: Aqui temos $z_x(1,1) = 1/2$ e $z_y(1,1) = 1$. A equação do plano tangente é $\pi\colon x + 2y - 2z + 1 = 0$. Como nenhuma das curvas está contida nesse plano todas as alternativas serão consideradas corretas.

Teste 5 [pltg3] Qual das seguintes curvas está contida no plano tangente à superfície $z = \sqrt{1+2x^2+y^2}$ no ponto $(1,-1,2)$?

- ■ $\gamma(t) = (3t, 2t+1, 2t)$
- ■ $\gamma(t) = \left(t, -t, \sqrt{1+3t^2}\right)$
- ■ $\gamma(t) = (2t-1, t-2, 2t)$
- ■ $\gamma(t) = \left(3t-2, 1-2t, 2t^2\right)$
- ■ $\gamma(t) = (3t+1, 2t+1, 2t+2)$

Solução: Aqui temos $z_x(1,-1) = 1$ e $z_y(1,-1) = -1/2$.A equação do plano tangente é $\pi\colon 2x - y - 2z + 1 = 0$. É fácil ver que a curva $\gamma(t) = (3t, 2t+1, 2t)$ é a única cujas coordenadas satisfazem a equação de π. Como em outras versões desta questão nenhuma das curvas está contida no plano correto, todas as alternativas serão consideradas corretas.

Teste 6 [pltg4] Qual das seguintes curvas está contida no plano tangente à superfície $z = \sqrt{1+x^2+2y^2}$ no ponto $(1,-1,2)$?

- ■ $\gamma(t) = (2t+1, 3t, 2-2t)$
- ■ $\gamma(t) = \left(t, -t, \sqrt{1+3t^2}\right)$
- ■ $\gamma(t) = (2t-1, t-2, 2t)$
- ■ $\gamma(t) = \left(3t-2, 1-2t, 2t^2\right)$
- ■ $\gamma(t) = (2t+1, 3t+1, -3t-1)$

Solução: Aqui temos $z_x(1,-1) = 1$ e $z_y(1,-1) = -1/2$.A equação do plano tangente é $\pi\colon x - 2y - 2z + 1 = 0$. É fácil ver que a curva $\gamma(t) = (2t+1, 3t, 2-2t)$ é a única cujas coordenadas satisfazem a equação de π. Como em outras versões desta questão nenhuma das curvas está contida no plano correto, todas as alternativas serão consideradas corretas.

Teste 7 [edp1] Seja $f(x,y) = y^{-3/2} e^{\frac{x^2}{\alpha y}}$, onde $y > 0$. O valor da constante α, para que f satisfaça a equação

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial f}{\partial x}\right),\ x \neq 0,$$

é:

■ $\alpha = -4$. [B] $\alpha = 4$. [C] $\alpha = -2$. [D] $\alpha = 2$. [E] inexistente.

Solução: Derivando diretamente temos que

$$f_y = -e^{\frac{x^2}{\alpha y}} \frac{(2x^2 + 3\alpha y)}{2\alpha y^{7/2}} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x^2}\left(x^2 f_x\right)_x = 2e^{\frac{x^2}{\alpha y}} \frac{(2x^2 + 3\alpha y)}{\alpha^2 y^{7/2}},$$

donde a equação proposta verifica-se se e somente se $-\dfrac{1}{2\alpha} = \dfrac{2}{\alpha^2}$, ou seja, $\alpha = -4$.

Teste 8 [edp2] Seja $f(x,y) = y^{-3/2} e^{\frac{x^2}{\alpha y}}$, onde $y > 0$. O valor da constante α, para que f satisfaça a equação

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial f}{\partial x}\right),\ x \neq 0,$$

é:

■ $\alpha = 4$. [B] $\alpha = -4$. [C] $\alpha = -2$. [D] $\alpha = 2$. [E] inexistente.

Solução: Derivando diretamente temos que

$$f_y = -e^{\frac{x^2}{\alpha y}} \frac{(2x^2 + 3\alpha y)}{2\alpha y^{7/2}} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x^2}\left(x^2 f_x\right)_x = 2e^{\frac{x^2}{\alpha y}} \frac{(2x^2 + 3\alpha y)}{\alpha^2 y^{7/2}},$$

donde a equação proposta verifica-se se e somente se $-\dfrac{1}{2\alpha} = -\dfrac{2}{\alpha^2}$, ou seja, $\alpha = 4$.

Teste 9 [edp3] Seja $f(x,y) = y^{-3/2}e^{\frac{x^2}{\alpha y}}$, onde $y > 0$. O valor da constante α, para que f satisfaça a equação

$$2\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial f}{\partial x}\right),\ x \neq 0$$

é:

■ $\alpha = -2$. [B] $\alpha = 2$. [C] $\alpha = -4$. [D] $\alpha = 4$. [E] inexistente.

Solução: Derivando diretamente temos que

$$f_y = -e^{\frac{x^2}{\alpha y}}\frac{(2x^2 + 3\alpha y)}{2\alpha y^{7/2}} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x^2}\left(x^2 f_x\right)_x = 2e^{\frac{x^2}{\alpha y}}\frac{(2x^2 + 3\alpha y)}{\alpha^2 y^{7/2}},$$

donde a equação proposta verifica-se se e somente se $-\frac{1}{\alpha} = \frac{2}{\alpha^2}$, ou seja, $\alpha = -2$.

Teste 10 [edp4] Seja $f(x,y) = y^{-3/2}e^{\frac{x^2}{\alpha y}}$, onde $y > 0$. O valor da constante α, para que f satisfaça a equação

$$-2\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial f}{\partial x}\right),\ x \neq 0$$

é:

■ $\alpha = 2$. [B] $\alpha = -2$. [C] $\alpha = -4$. [D] $\alpha = 4$. [E] inexistente.

Solução: Derivando diretamente temos que

$$f_y = -e^{\frac{x^2}{\alpha y}}\frac{(2x^2 + 3\alpha y)}{2\alpha y^{7/2}} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x^2}\left(x^2 f_x\right)_x = 2e^{\frac{x^2}{\alpha y}}\frac{(2x^2 + 3\alpha y)}{\alpha^2 y^{7/2}},$$

donde a equação proposta verifica-se se e somente se $\frac{1}{\alpha} = \frac{2}{\alpha^2}$, ou seja, $\alpha = 2$.

Teste 11 [cadeia1] Seja $G(x,y)$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que

$$G\Big(t^3-(t-1)\cos(t^2-1), 1-t^2\Big) = t^3-t^2-t, \text{ para todo } t\in\mathbb{R}.$$

Assinale a alternativa da direção e sentido de maior variação da função G no ponto $(1,0)$.

■ $(1,1)$. ■ $(-1/2,1)$. ■ $(1,-1/2)$. ■ $(-1,-1)$. ■ $(1/2,-1)$.

Solução: A direção e sentido procurados são as dadas por $\nabla G(1,0)$. Para descobrir este vetor, derivamos a expressão acima em relação a t, usando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned}G_x\Big(t^3-(t-1)\cos(t^2-1),1-t^2\Big)\big(3t^2-\cos(t^2-1)+(t-1)2t\sin(t^2-1)\big)+\\ G_y\Big(t^3-(t-1)\cos(t^2-1),1-t^2\Big)(-2t)=3t^2-2t-1.\end{aligned}$$

O ponto $(1,0)$ é atingido quanto $t=\pm1$:

- $t=1$: $2G_x(1,0)-2G_y(1,0)=0$;
- $t=-1$: $2G_x(1,0)+2G_y(1,0)=4$.

Destas duas equações temos $\nabla G(1,0)=(1,1)$. Como em uma das versões desta questão nenhuma das alternativas contém a resposta correta todas as alternativas serão consideradas adequadas.

Teste 12 [cadeia2] Seja $G(x,y)$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que

$$G\Big(1-t^2, t^3-(t-1)\cos(t^2-1)\Big) = -t^3+t^2+t, \text{ para todo } t\in\mathbb{R}.$$

Assinale a alternativa da direção e sentido de maior variação da função G no ponto $(0,1)$.

■ $(-1,-1)$. ■ $(1,1)$. ■ $(-1/2,1)$. ■ $(1,-1/2)$. ■ $(1/2,-1)$.

Solução: A direção e sentido procurados são as dadas por $\nabla G(0,1)$. Para descobrir este vetor, derivamos a expressão acima em relação a t, usando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned}&G_x\Big(1-t^2,t^3-(t-1)\cos(t^2-1)\Big)(-2t)+\\ &\quad G_y\Big(1-t^2,t^3-(t-1)\cos(t^2-1)\Big)\big(3t^2-\cos(t^2-1)+(t-1)2t\sin(t^2-1)\big)=-3t^2+2t+1.\end{aligned}$$

O ponto $(0,1)$ é atingido quanto $t=\pm1$:

- $t=1$: $-2G_x(0,1)+2G_y(0,1)=0$;
- $t=-1$: $2G_x(0,1)+2G_y(0,1)=-4$.

Destas duas equações temos $\nabla G(1,0)=(-1,-1)$. Como em uma das versões desta questão nenhuma das alternativas contém a resposta correta todas as alternativas serão consideradas adequadas.

Teste 13 [`cadeia3`] Seja $G(x,y)$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que

$$G\Big(t^3-(t-1)\cos(t^2-1), 1-2t^2\Big) = t^3-t^2-t, \text{ para todo } t\in\mathbb{R}.$$

Assinale a alternativa da direção e sentido de maior variação da função G no ponto $(1,-1)$.

■ $(1, 1/2)$. ■ $(1/2, -1)$. ■ $(1, -1/2)$. ■ $(1/2, 1)$. ■ $(-1, 1/2)$.

Solução: A direção e sentido procurados são as dadas por $\nabla G(1,-1)$. Para descobrir este vetor, derivamos a expressão acima em relação a t, usando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} &G_x\Big(t^3-(t-1)\cos(t^2-1), 1-2t^2\Big)\left(3t^2-\cos(t^2-1)+(t-1)2t\sin(t^2-1)\right)+\\ &\quad G_y\Big(t^3-(t-1)\cos(t^2-1), 1-2t^2\Big)(-4t) = 3t^2-2t-1. \end{aligned}$$

O ponto $(1,-1)$ é atingido quanto $t=\pm1$:

- $t=1$: $2G_x(1,-1)-4G_y(1,-1)=0$;
- $t=-1$: $2G_x(1,-1)+4G_y(1,-1)=4$.

Destas duas equações temos $\nabla G(1,-1) = (1, 1/2)$. Como em uma das versões desta questão nenhuma das alternativas contém a resposta correta todas as alternativas serão consideradas adequadas.

Teste 14 [`cadeia4`] Seja $G(x,y)$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que

$$G\Big(1-2t^2, t^3-(t-1)\cos(t^2-1)\Big) = -t^3+t^2+t, \text{ para todo } t\in\mathbb{R}.$$

Assinale a alternativa da direção e sentido de maior variação da função G no ponto $(-1,1)$.

■ $(-1, -1/2)$. ■ $(1/2, -1)$. ■ $(1, -1/2)$. ■ $(1/2, 1)$.
■ $(-1, 1/2)$.

Solução: A direção e sentido procurados são as dadas por $\nabla G(-1,1)$. Para descobrir este vetor, derivamos a expressão acima em relação a t, usando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} &G_x\Big(1-2t^2, t^3-(t-1)\cos(t^2-1)\Big)(-4t)+\\ &\quad G_y\Big(1-2t^2, t^3-(t-1)\cos(t^2-1)\Big)\left(3t^2-\cos(t^2-1)+(t-1)2t\sin(t^2-1)\right) = -3t^2+2t+1. \end{aligned}$$

O ponto $(-1,1)$ é atingido quanto $t=\pm1$:

- $t=1$: $-4G_x(-1,1)+2G_y(-1,1)=0$;
- $t=-1$: $4G_x(1,-1)+2G_y(1,-1)=-4$.

Destas duas equações temos $\nabla G(-1,1) = (-1/2, -1)$. Como nesta versão da questão nenhuma das alternativas contém a resposta correta todas as alternativas serão consideradas adequadas.

Teste 15 [temp1] Admita que $T(x,y) = 16 - 2x^2 - y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy. Determine uma parametrização $\gamma(t)$ para a trajetória descrita por um ponto P que se desloca, a partir do ponto $(1,1)$, sempre na direção e sentido de máximo crescimento da temperatura.

- ■ $\gamma(t) = (e^{-4t}, e^{-2t})$, $t \geq 0$
- [B] $\gamma(t) = (e^{-2t}, e^{-4t})$, $t \geq 0$
- [C] $\gamma(t) = (e^{4t}, e^{2t})$, $t \geq 0$
- [D] $\gamma(t) = (e^{2t}, e^{4t})$, $t \geq 0$
- [E] $\gamma(t) = (1 + e^{-4t}, 1 + e^{-2t})$, $t \geq 0$

Solução: A trajetória procurada é aquela cujo vetor tangente é paralelo ao gradiente de T em cada ponto, ou seja, $\left\{\gamma'(t), \nabla T\big(\gamma(t)\big)\right\}$ é linearmente dependente. Como $\nabla T(x,y) = (-4x, -2y)$, a curva $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ deve satisfazer, para todo $t \geq 0$,

$$\begin{cases} x'(t) &= -4x(t) \\ y'(t) &= -2y(t), \end{cases},$$

com $x(0) = y(0) = 1$, donde $x(t) = e^{-4t}$ e $y(t) = e^{-2t}$, $t \geq 0$.

Teste 16 [temp2] Admita que $T(x,y) = 16 - x^2 - 2y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy. Determine uma parametrização $\gamma(t)$ para a trajetória descrita por um ponto P que se desloca, a partir do ponto $(1,1)$, sempre na direção e sentido de máximo crescimento da temperatura.

- ■ $\gamma(t) = (e^{-2t}, e^{-4t})$, $t \geq 0$
- [B] $\gamma(t) = (e^{-4t}, e^{-2t})$, $t \geq 0$
- [C] $\gamma(t) = (e^{4t}, e^{2t})$, $t \geq 0$
- [D] $\gamma(t) = (e^{2t}, e^{4t})$, $t \geq 0$
- [E] $\gamma(t) = (1 + e^{-4t}, 1 + e^{-2t})$, $t \geq 0$

Solução: A trajetória procurada é aquela cujo vetor tangente é paralelo ao gradiente de T em cada ponto, ou seja, $\left\{\gamma'(t), \nabla T\big(\gamma(t)\big)\right\}$ é linearmente dependente. Como $\nabla T(x,y) = (-2x, -4y)$, a curva $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ deve satisfazer, para todo $t \geq 0$,

$$\begin{cases} x'(t) &= -2x(t) \\ y'(t) &= -4y(t), \end{cases},$$

com $x(0) = y(0) = 1$, donde $x(t) = e^{-2t}$ e $y(t) = e^{-4t}$, $t \geq 0$.

Questão 1. Considere uma função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Suponha que:

(i) a imagem da curva plana $\gamma(t) = \big(\sec^2(t), \operatorname{tg}(t)\big)$, para $t \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, esteja contida numa curva de nível de f.

(ii) a imagem da curva no espaço $\sigma(u) = \left(\sqrt{u}, \frac{u^2-4u-4}{u}, \sqrt[4]{4u} - \sqrt[3]{2u} + \sqrt{u}\right)$, com $u > 0$, esteja contida no gráfico de f.

Determine uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $\big(2, -1, f(2,-1)\big)$.

Solução: Para determinar o plano tangente em questão, devemos determinar $\nabla f(2,-1)$. Para tanto observamos que (i) nos diz que $(f \circ \gamma)(t)$ é constante. Derivando com a regra da cadeia temos que $\langle \nabla f\big(\gamma(t)\big), \gamma'(t)\rangle = 0$. Para $t = 3\pi/4$ temos

$$-4f_x(2,-1) + 2f_y(2,-1) = 0. \tag{1}$$

Por outro lado, (ii) nos diz que $f\left(\sqrt{u}, \frac{u^2-4u-4}{u}\right) = \sqrt[4]{4u} - \sqrt[3]{2u} + \sqrt{u}$. Fazendo $u = 4$ temos $f(2,-1) = 2$ e, derivando no ponto $u = 4$, obtemos

$$\frac{1}{4}f_x(2,-1) + \frac{5}{4}f_y(2,-1) = \frac{5}{24}. \tag{2}$$

Com isso, $\nabla f(2,-1) = (5/66, 10/66)$ e portanto o plano procurado é

$$\pi : \frac{5}{66}(x-2) + \frac{10}{66}(y+1) - z + 2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{5}{66}x + \frac{10}{66}y - z + 2 = 0.$$

$\square$

Questão 2. Considere uma função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Suponha que:

(i) a imagem da curva plana $\gamma(t) = \big(\operatorname{cossec}^2(t), \operatorname{cotg}(t)\big)$, para $t \in]0, \pi[$, esteja contida numa curva de nível de f.

(ii) a imagem da curva no espaço $\sigma(u) = \left(\sqrt{u}, \dfrac{u^2 - 4u - 4}{u}, \sqrt[4]{4u} - \sqrt[3]{2u} + \sqrt{u}\right)$, com $u > 0$, esteja contida no gráfico de f.

Determine uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $\big(2, -1, f(2, -1)\big)$.

Solução: Para determinar o plano tangente em questão, devemos determinar $\nabla f(2, -1)$. Para tanto observamos que (i) nos diz que $(f \circ \gamma)(t)$ é constante. Derivando com a regra da cadeia temos que $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = 0$. Para $t = 3\pi/4$ temos

$$4f_x(2, -1) - 2f_y(2, -1) = 0. \tag{3}$$

Por outro lado, (ii) nos diz que $f\left(\sqrt{u}, \frac{u^2-4u-4}{u}\right) = \sqrt[4]{4u} - \sqrt[3]{2u} + \sqrt{u}$. Fazendo $u = 4$ temos $f(2, -1) = 2$ e, derivando no ponto $u = 4$, obtemos

$$\frac{1}{4} f_x(2, -1) + \frac{5}{4} f_y(2, -1) = \frac{5}{24}. \tag{4}$$

Com isso, $\nabla f(2, -1) = (5/66, 10/66)$ e portanto o plano procurado é

$$\pi : \frac{5}{66}(x - 2) + \frac{10}{66}(y + 1) - z + 2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{5}{66}x + \frac{10}{66}y - z + 2 = 0.$$

$\square$

Questão 3. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} xy^2 \text{sen}\left(\dfrac{x}{y^2}\right), & \text{se } y \neq 0 \\ 0, & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

a. Determinar as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, explicitando os domínios.

b. $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em $(1,0)$? Justifique

c. f é diferenciável em $(1,0)$? Justifique.

d. f é diferenciável em (x,y) para $y \neq 0$? Justifique.

Solução:

a. Se $y = 0$, então

$$f_x(x,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,0) - f(x,0)}{h} = 0 \text{ e}$$
$$f_y(x,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x,0+k) - f(x,0)}{k} = \lim_{k \to 0} xk \sin(x/k^2) = 0.$$

Se $y \neq 0$, então

$$f_x(x,y) = y^2 \sin(x/y^2) + x \cos(x/y^2)$$
$$f_y(x,y) = 2xy \sin(x/y^2) - 2\frac{x^2}{y} \cos(x/y^2).$$

b. Não, pois $\lim_{(x,y) \to (1,0)} f_y(x,y)$ não existe, já que a primeira parcela tende a zero e a segunda não tem limite.

c. Devemos estudar o limite

$$\begin{aligned} &\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(1+h,0+k) - f(1,0) - f_x(1,0)h - f_y(1,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k) \to (0,0)} (1+h)k \sin((1+h)/k^2) \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde f é diferenciável em $(1,0)$.

d. Sim, pois nesses pontos f_x e f_y são funções contínuas, ou seja, f é de classe C^1.

□

Questão 4. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} yx^2\text{sen}\left(\dfrac{y}{x^2}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

a. Determinar as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, explicitando os domínios.

b. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(0,1)$? Justifique

c. f é diferenciável em $(0,1)$? Justifique.

d. f é diferenciável em (x,y) para $x \neq 0$? Justifique.

Solução:

a. Se $x = 0$, então

$$f_x(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} hy\sin(y/h^2) = 0 \text{ e}$$
$$f_y(0,y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,y+k) - f(0,y)}{k} = 0.$$

Se $x \neq 0$, então

$$f_x(x,y) = x^2\sin(y/x^2) + y\cos(y/x^2)$$
$$f_y(x,y) = 2xy\sin(y/x^2) - 2\frac{y^2}{x}\cos(y/x^2).$$

b. Não, pois $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f_x(x,y)$ não existe, já que a primeira parcela tende a zero e a segunda não tem limite.

c. Devemos estudar o limite

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to(0,0)} & \frac{f(h,1+k) - f(0,1) - f_x(0,1)h - f_y(0,1)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} (1+k)h\sin((1+k)/h^2)\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= 0,\end{aligned}$$

donde f é diferenciável em $(0,1)$.

d. Sim, pois nesses pontos f_x e f_y são funções contínuas, ou seja, f é de classe C^1.

□