MAT–2454 — Cálculo Diferencial e Integral II — EP–USP

Primeira Prova — Soluções – Tipo A

TESTES	SOLUÇÕES
1. Seja C a curva obtida pela interseção do plano $z = 2x$ e do paraboloide $z = x^2 + 4y^2$. O vetor tangente a C no ponto $(1, {}^1\!/_2, 2)$ é paralelo ao vetor: **a.** $(0,2,1)$; **b.** $(1,0,-1)$; **c.** $(-1,0,-2)$; **d.** $(0,1,3)$; **e.** $(1,0,5)$.	**1.** As equações das duas superfícies dizem, completando quadrados, que $(x-1)^2 + (2y)^2 = 1$, donde podemos escrever $x(t) = 1 + \cos t$ e $y(t) = {}^1\!/_2 \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Deste modo $z(t) = 2 + 2\cos t$. O ponto dado é atingido quando $t = {}^\pi\!/_2$ e então temos $\gamma'({}^\pi\!/_2) = (-1,0,-2) \parallel (1,0,2)$. Alternativa correta: **c.**
2. O valor de $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x+y}$ é: **a.** 0; **b.** 1; **c.** -1; **d.** 2; **e.** inexistente.	**2.** As curvas de nível da função $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x+y}$ são da forma $x^2 = c(x+y)$, ou seja, parábolas se $c \neq 0$ e o eixo Oy, se $c = 0$. Todas elas tendem a passar pela origem e portanto o limite não existe. Alternativa correta: **e.**
3. Considere as seguintes afirmações: I. A imagem da curva $\gamma_1(t) = (\cos(2t), \sin^2(t))$, $t \in \mathbb{R}$ está contida em uma reta. II. A imagem da curva $\gamma_2(t) = (e^{2t}, e^t)$, $t \in \mathbb{R}$ é uma parábola. III. A imagem da curva $\gamma_3(t) = (e^t + e^{-t}, e^t - e^{-t})$, $t \in \mathbb{R}$ está contida em uma hipérbole. São corretas apenas as afirmações **a.** I; **b.** II; **c.** III; **d.** I e III; **e.** II e III.	**3.** (I) As coordenadas da curva γ_1 satisfazem $x(t) = 1 - 2y(t)$, donde sua imagem está contida na reta de equação $x = 1 - 2y$. (II) Aqui temos $x(t) = y^2(t)$, logo a imagem de γ_2 está contida na parábola $x = y^2$. (III) Finalmente temos $x(t) = 2\cosh t$ e $y(t) = 2\sinh t$, e portanto a imagem de γ_3 está contida na hipérbole $x^2 - y^2 = 4$. Nos itens I e II a imagem não é toda a curva em questão pois as funções coordenadas não são sobrejetoras. No item III a curva cobre todo o ramo “direito” da hipérbole pois $x(t) > 0$ e $y(t)$ é sobrejetora. Alternativa correta: **d.**
4. Sabendo que a imagem da curva $\gamma(t) = (t, 2t, z(t))$, $t \in \mathbb{R}$, está contida no gráfico da função dada por $f(x,y) = x^3 + x^2 - y^2$, o vetor tangente a γ em $\gamma(1)$ é igual a: **a.** $(1,2,-3)$; **b.** $(1,2,-1)$; **c.** $(1,2,1)$; **d.** $(1,2,3)$; **e.** $(1,2,5)$.	**4.** Nessas condições temos $z(t) = f(x(t), y(t)) = t^3 + t^2 - (2t)^2 = t^3 - 3t^2$, donde $z'(t) = 3t^2 - 6t$ e então $\gamma'(1) = (1,2,-3)$. Alternativa correta: **a.**
5. O valor de k que torna a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{(x-1)(x^2+y^2)} - 1}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ k, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ contínua em $\mathbb{R}^2$ é **a.** -2; **b.** -1; **c.** 0; **d.** 1; **e.** Não existe k que torne f contínua em $(0,0)$.	**5.** Multiplicando e dividindo por $x-1$ e e fazendo $t = (x-1)(x^2+y^2)$ devemos ter que $k = \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{(x-1)(x^2+y^2)} - 1}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x - 1 \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = -1 \times 1 = -1$ Alternativa correta: **b.**

Gabaritos dos demais tipos de Prova: **B**: e – d – c – b – a; **C**: b – c – a – e – d; **D**: e – a – d – b – c.

Questão 1 (Valor: $3.0 = 0.5 + 1.5 + 1.0$)**.** Considere a função $f(x, y) = \dfrac{x^2 + 4y^2 - 1}{x^2 - y^2}$.

a. Determine o domínio de f e esboce-o na Figura 1.
b. Determine as curvas de nível $c = 0$ e $c = 1$ de f, esboçando-as também na Figura 1.
c. Existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\sqrt{5}/5,\sqrt{5}/5)} f(x, y)$? Justifique.

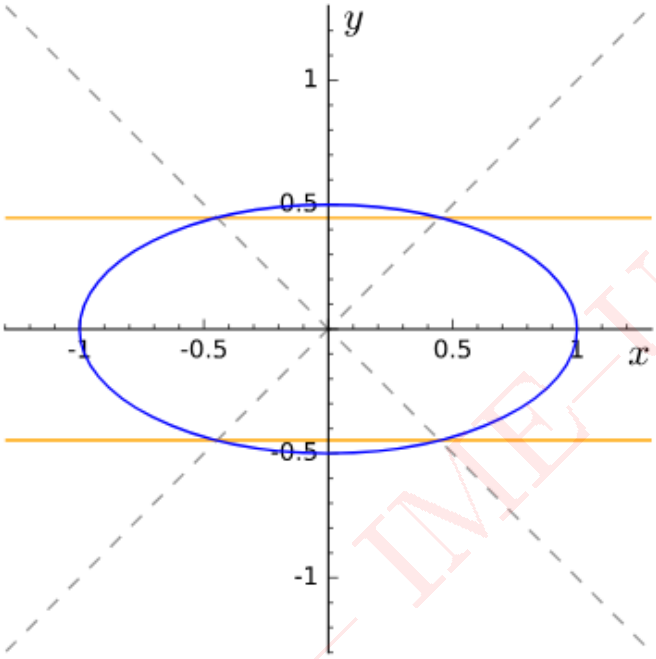

FIGURA 1. Domínio e curvas de nível de f

Solução.
a. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \neq 0\}$. Os pontos excluídos do domínio são as duas bissetrizes dos eixos coordenados, tracejadas na Figura 1.
b. A curva de nível $c = 0$ é o conjunto

$$f^{-1}(0) = \{(x, y) \in D_f : x^2 + 4y^2 = 1\}.$$

Sua representação gráfica é a elipse em azul, descartando os pontos sobre as linhas tracejadas (que não estão no domínio.

Analogamente para $c = 1$ temos

$$f^{-1}(1) = \{(x, y) \in D_f : 5y^2 = 1\}.$$

Sua representação gráfica é o par de retas paralelas na Figura 1.
c. Não, pois ao longo das curvas nível acima a função tende[1] a valores distintos quando se aproxima do ponto $(\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/5)$.

[1] é constante, na verdade

Questão 2 (Valor: 2.0)**.** Calcule o seguinte limite, caso exista:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \sin\left(\frac{x^2y^3}{x^2+y^2}\right).$$

Justifique cuidadosamente todas as suas afirmações.

Solução.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{xy^2}{x^2+y^4}}_{\text{ltda.}(*)} \underbrace{\sin\left(\frac{x^2y^3}{x^2+y^2}\right)}_{\to 0(**)} = 0.$$

Justificando cada afirmação, lembrando que $(x,y)\to(0,0)$ e portanto $(x,y)\neq(0,0)$:

$(*)$: Primeiro observamos que $0 \leq (x-y^2)^2$ e portanto $\frac{xy^2}{x^2+y^4} \leq \frac{1}{2}$. Analogamente $0 \leq (x+y^2)^2$ implica que $-\frac{1}{2} \leq \frac{xy^2}{x^2+y^4}$. Assim,

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{xy^2}{x^2+y^4} \leq \frac{1}{2}.$$

$(**)$: Inicialmente observamos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{y^3}_{\to 0} \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{ltda.}(***)} = 0.$$

Como a função seno é contínua temos então que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin\left(\frac{x^2y^3}{x^2+y^2}\right) = \sin\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2}\right) = \sin 0 = 0.$$

Finalmente $(***)$ justifica-se da seguinte maneira: $0 < x^2 \leq x^2+y^2 \implies 0 < \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$.

Solução alternativa:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \sin\left(\frac{x^2y^3}{x^2+y^2}\right) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \frac{\sin\left(\frac{x^2y^3}{x^2+y^2}\right)}{\frac{x^2y^3}{x^2+y^2}} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{xy}_{\to 0} \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{ltda.}(***)} \underbrace{\frac{y^4}{x^2+y^4}}_{\text{ltda.}(\dagger)} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{x^2y^3}{x^2+y^2}\right)}{\frac{x^2y^3}{x^2+y^2}}}_{\to 1(\ddagger)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Justificando cada afirmação, lembrando que $(x,y)\to(0,0)$ e portanto $(x,y)\neq(0,0)$:

$(\dagger)$: $0 < y^4 \implies x^2 \leq x^2+y^4$, e $y^4 > 0$, donde $0 < y^4 \leq x^2+y^4$ e portanto $0 < \frac{y^4}{x^2+y^4} \leq 1$.

$(\ddagger)$: fazendo $t = \frac{x^2y^3}{x^2+y^2}$, temos que $t \to 0$ quando $(x,y)\to(0,0)$, pois

$$\frac{x^2y^3}{x^2+y^2} = \underbrace{y^3}_{\to 0} \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{ltda.}}.$$

Assim,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(\frac{x^2y^3}{x^2+y^2}\right)}{\frac{x^2y^3}{x^2+y^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1.$$