INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
MAT-2454 — CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II (ESCOLA POLITÉCNICA)
TERCEIRA LISTA DE EXERCÍCIOS - PROFESSOR: EQUIPE DE PROFESSORES

BONS ESTUDOS!

POLINÔMIOS DE TAYLOR

EXERCÍCIOS

0.1. Vide Lista 2, Seção 4.

1. SUPERFÍCIES DE NÍVEL, PLANOS TANGENTES E DERIVADAS DIRECIONAIS

EXERCÍCIOS

1.1. Em cada caso, esboce a superfície de nível c da função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:
a. $F(x,y,z) = x + 2y + 3z$ e $c = 1$ **b.** $F(x,y,z) = x^2 - e^y + z^2$ e $c = 0$
c. $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $c = 0$ **d.** $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $c = -1$
e. $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $c = 1$ **f.** $F(x,y,z) = x^2 - y^2$ e $c = 1$
g. $F(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$ e $c = 1$
Alguma dessas superfícies é o gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

1.2. Ache os pontos do hiperbolóide $x^2 - y^2 + 2z^2 = 1$ nos quais a reta normal é paralela à reta que une os pontos $(3,-1,0)$ e $(5,3,6)$.

1.3. Seja $a > 0$ e considere o plano tangente à superfície $xyz = a$ num ponto do primeiro octante. Mostre que o tetraedro formado por este plano e os planos coordenados tem volume independente do ponto de tangência.

1.4. Mostre que o elipsóide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ se tangenciam no ponto $(1,1,2)$ (isto é, que elas têm o mesmo plano tangente neste ponto).

1.5. Ache a reta tangente à interseção do gráfico de $f(x,y) = x^3 + y^3 + 2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 2$ no ponto $(1,1,4)$.

1.6. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, diferenciáveis com $\nabla f(1,0) = (2,1)$ e $\gamma'(t) \neq (0,0,0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Suponha que a imagem de γ esteja contida na interseção do gráfico de f com a superfície $z^3 + x^3 + yz + xy^3 = 0$. Sabendo que $(1,0,-1)$ na imagem de γ, determine uma equação para a reta tangente a γ neste ponto.

1.7. Determine a equação da esfera que tangencia a superfície $(x-1)^2 + \dfrac{(y-2)^2}{4} - (z-1)^2 = 0$ nos pontos $(2,2,2)$ e $(2,2,0)$.

1.8. Suponha que sobre um certo aberto $A \subset \mathbb{R}^3$ o potencial elétrico $V : A \to \mathbb{R}$ é dado por $V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.
a. Ache a taxa de variação do potencial em $P = (3,4,5)$ na direção do vetor $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
b. Qual a direção e sentido em que a taxa do potencial elétrico, em P, é a maior possível? E a menor possível?
c. Qual o valor dessa taxa máxima?

2. CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS EM ABERTOS DE $\mathbb{R}^2$

EXERCÍCIOS

2.1. Determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os:
a. $z = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$ **b.** $z = x^2y^2$
c. $z = \ln(3x^2 + 4y^2 - 2x + 7)$ **d.** $z = x^3y^3$
e. $z = (2x - x^2)(2y - y^2)$ **f.** $z = xye^{-x^2-y^2}$

2.2. Determine os valores de a para os quais a função $f(x,y) = 2ax^4 + y^2 - ax^2 - 2y$
a. tenha exatamente um ponto de sela e dois pontos de mínimo local;
b. tenha exatamente dois pontos de sela e um mínimo local.
c. Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha ao menos um máximo local?
d. Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha mais de 3 pontos críticos?

---

3. Máximos e Mínimos em Conjuntos Compactos

Exercícios

3.1. Esboce a região D e determine o máximo e o mínimo absolutos da função $f : D \to \mathbb{R}$ quando
a. $f(x,y) = 5 - 3x + 4y$ e D é o triângulo (com interior e lados inclusos) cujos vértices são $(0,0)$, $(4,0)$ e $(4,5)$;
b. $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, x \leq 0, y \geq 0\}$;
c. $f(x,y) = xy$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1, x \in [1,2]\}$;
d. $f(x,y) = 2x^3 + y^4$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \in [0, \frac{1}{4}], y \geq 0\}$.
Você pode usar multiplicadores de Lagrange (apenas) para resolver os itens (c) e (d)?

3.2. Determine o valor máximo e o valor mínimo da função f sujeita às restrições explicitadas:
a. $f(x,y) = xy$, sujeito a $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64 = 0$;
b. $f(x,y,z) = xyz$, sujeito a $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$;
c. $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$, sujeito a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

3.3. Determine o valor máximo e o valor mínimo de f na região R sendo
a. $f(x,y,z) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z$ e $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 56\}$;
b. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy - 4z + 3x$ e $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 4 \text{ e } x,y,z \geq 0\}$.

3.4. Encontre os pontos de máximo e de mínimo de f em C, sem parametrizar C, quando
a. $f(x,y) = x^3y$ e $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$;
b. $f(x,y,z) = x - z$ e $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z \text{ e } z = 2y\}$;
c. $f(x,y,z) = x + y + z$ e $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } 4x + 4y = z^2\}$;
d. $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$ e $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } x + y + z = 1\}$.
Resolva também os itens **a.** e **b.** acima parametrizando C.

3.5. Encontre o máximo e o mínimo de $f(x,y,z) = 2x + y - z^2$ no compacto C.
a. $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0, z > 0 \text{ e } 2z = 2x + y + 4\}$;
b. $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0, z > 0 \text{ e } 2z \leq 2x + y + 4\}$;

3.6. Seja $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy - 4z$. Determine o máximo e o mínimo de f em:
a. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$;
b. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$;
c. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } z \geq \frac{1}{2}\}$;
d. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \text{ e } z \geq \frac{1}{2}\}$;
e. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } z \geq x + y\}$.

---

4. Máximos e Mínimos em Conjuntos Arbitrários

Cada um dos problemas abaixo tem solução. Justifique sua a existência e, em seguida, determine-a.

Exercícios

4.1. Encontre os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos de $(0,0)$.

4.2. Qual o ponto do plano $x + 2y - z + 4 = 0$ que está mais próximo do ponto $(1,1,1)$?

4.3. Determine o maior produto de 3 números reais positivos cuja soma é 100. Exiba tais números.

4.4. Sendo α, β e γ os ângulos de um triângulo, calcule o valor máximo de $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$.

4.5. Determine as dimensões do paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, inscrito no elipsóide $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$.

4.6. Determine as dimensões do paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, de modo que uma das faces está contida no plano $z = 0$ e a correspondente face oposta tem os seus vértices no parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, $z > 0$.

4.7. Um pentágono com 12cm de perímetro é construído colocando-se um triângulo isósceles sobre um retângulo. Dentre esses pentágonos, determine as medidas dos lados daquele que tem área máxima.

4.8. Determine a equação do plano que passa por $(2, 2, 1)$ e que delimita no primeiro octante o tetraedro de menor volume.

4.9. Dentre todos os planos que são tangentes à superfície $xy^2z^2 = 1$ encontre aqueles mais distantes da origem.

4.10. Dê as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com 27cm^2 de papelão.

4.11. Um quarto de armazenamento aquecido tem a forma de uma caixa retangular e tem o volume de 1000 pés cúbicos. Como o ar quente sobe, a perda de calor por unidade de área pelo teto é cinco vezes maior que a perda de calor pelo chão. A perda de calor pelas quatro paredes é três vezes maior que a perda de calor pelo chão. Determine as dimensões do quarto que minimiza a perda de calor e, portanto, minimiza o custo do aquecimento.

---

5. Máximos e Mínimos - Cálculo 1 $\times$ Cálculo 2

Exercícios

5.1. É impossível para uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ ter 2 máximos locais e nenhum mínimo local. Por quê? O mesmo não ocorre com uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Verifique que $f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$ tem exatamente dois pontos críticos, ambos máximos locais. Faça um esboço de uma superfície com tais características e tente compreender como isso ocorre.

5.2. Mostre que a função $f(x, y) = x^2 + 5y^2(1 + x)^3$ possui um único ponto crítico, que este ponto crítico é um mínimo local, e que f não possui ponto de mínimo global.

5.3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + l$, onde a, b, c, d, e, l são constantes não todas nulas. Prove que se (x_0, y_0) for um extremante local de f, então será um extremante global de f.

Dica. Dados $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, observe que a função $g(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$ é uma parábola.

---

6. Exercícios Complementares e Aplicações (só depois de fazer tudo, ok?)

Exercícios

6.1. (**Método dos Mínimos Quadrados**). Fixado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, sejam $P_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, com $1 \leq i \leq n$, tais que $x_i \neq x_j$, se $i \neq j$. Estes pontos representam os resultados de algum experimento, e gostaríamos de encontrar uma função linear afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ a serem determinados, tal que o gráfico de f contenha P_i para $1 \leq i \leq n$. Nem sempre existe uma tal função; com efeito, o sistema linear nas variáveis a e b dado por $ax_i + b = y_i$, $1 \leq i \leq n$, é, em geral, impossível se $n \geq 3$. O objetivo deste exercício é verificar que é possível encontrar uma solução aproximada deste sistema, no sentido de minimizar o erro quadrático médio, dado por

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2.$$

Mostre que $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ assim definida tem um único ponto de mínimo global e encontre tal ponto.

6.2. (**Modelagem de Portfolios**). Aqui daremos um roteiro para a solução de dois problemas relacionados a investimento. Suponha que um investidor tem n opções de ativos e pode escolher livremente um percentual de seu capital para aplicar em cada um deles. Tal escolha é chamada de um *portfolio*. O modelo assume que o investidor é averso a riscos, ou seja, entre dois ativos com um mesmo retorno médio ele vai preferir sempre o de menor risco.

O valores de retorno médio (r_i) e risco/volatilidade/desvio padrão (σ_i) de cada ativo são tipicamente obtidos a partir de sua série histórica. Por comodidade escrevemos os vetores $r = (r_1, \dots, r_n)$ e $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$.

Se denotamos por $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ o vetor (de *pesos*) tal que ω_i é o percentual de capital que o investidor aplica no i-ésimo ativo, temos que o retorno esperado desse portfolio é $R_p(\omega) = \langle \omega, r \rangle$.

Além disso, se $\rho = (\rho_{ij})$ é matriz de correlação entre os retornos dos ativos, temos que a variância do retorno deste portfolio é $\sigma_p = \Big(\sum\limits_{i,j=1}^{n} \omega_i \omega_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \Big)^{\frac{1}{2}}$.

As perguntas naturais que surgem são:

(i) Fixado um risco σ_p determine ω tal que $R_p(\omega)$ seja máximo.

(ii) Fixado um retorno R_p determine ω tal que $\sigma_p(\omega)$ seja mínimo.

Ambas as perguntas podem ser reformuladas como problemas de máximos ou mínimos condicionados, já que as coordenadas de ω devem satisfazer $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i = 1$ (um hiperplano em $\mathbb{R}^n$) e temos que R_p ou σ_p é constante. Assim os problemas acima se reescrevem como

(i) Dado um risco $\sigma_p > 0$ arbitrário,

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && R_p(\omega) \\ &\text{sujeito a} && \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \\ & && \omega_i \geq 0, i = 1, \dots, n \\ & && \Big(\sum_{i,j=1}^{n} \omega_i \omega_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \Big)^{\frac{1}{2}} = \sigma_p. \end{aligned}$$

(ii) Dado um retorno R_p,

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \sigma_p(\omega) \\ &\text{sujeito a} && \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \\ & && \omega_i \geq 0, i = 1, \dots, n \\ & && \langle \omega, r \rangle = R_p. \end{aligned}$$

Explicite as condições de Lagrange que um ponto crítico deve satisfazer. O conjunto dos pares (σ_p, R_p) para os quais o problema admite solução determina uma hipérbole, chamada *Markowitz bullet*. Você consegue determinar uma expressão para essa hipérbole?

6.3. Seja $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma forma quadrática, i.e. $Q : x \mapsto \langle T \cdot x, x \rangle$ onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$ e $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um operador auto-adjunto. Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $x \mapsto \langle x, x \rangle$, de modo que a superfície de nível 1 de g coincide com a esfera unitária centrada na origem de $\mathbb{R}^n$, S_1. Mostre que: (i) Q tem pontos de máximo e mínimo em S_1; (ii) todos os pontos de máximo e de mínimo de Q em S_1 são auto-vetores de T; (iii) os valores máximo e mínimo de Q em S_1 são, respectivamente, o maior e o menor auto-valor de T.

Observação 6.1. Algumas aplicações deste exercício: (i) na *Mecânica dos Meios Contínuos*, as chamadas *tensões principais* em um ponto (i.e. os auto-valores do tensor das tensões) são tais que a maior tensão principal é a tensão normal máxima e a menor tensão principal é a tensão normal mínima no ponto em questão; (ii) analogamente, os momentos principais de inércia de um corpo rígido (i.e. os auto-valores do tensor de inércia) com relação a um dado ponto de referência são tais que o maior momento principal corresponde ao momento de inércia máximo e o menor momento principal corresponde ao momento de inércia mínimo em relação a eixos que passam pelo ponto em questão.

6.4. Use o exercício anterior para mostrar que todo operador auto-adjunto $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ admite uma base ortonormal que o diagonaliza.

6.5. Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto \|x - x_0\|$, onde $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana. Mostre que f é derivável no complementar de $\{x_0\}$ e que, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$, $\nabla f(x) = \frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}$.

6.6. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $g : X \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e $c \in \mathbb{R}$ um *valor regular de g*, i.e. tal que o gradiente de g não se anule na superfície de nível c de g, $S_c(g)$. Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ um ponto fora de $S_c(g)$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto \|x - x_0\|$. Aplique o exercício anterior e o teorema dos multiplicadores de Lagrange para concluir que, se $x_1 \in S_c(g)$ for ponto de máximo ou de mínimo local da restrição de f a $S_c(g)$, então o segmento que liga x_1 a x_0 é normal a $S_c(g)$ em x_1. Isso ocorre, em particular, se $x_1 \in S_c(g)$ realizar a distância de $S_c(g)$ a x_0, i.e se $\|x_0 - x_1\| = \min\{\|x_0 - x\| : x \in S_c(g)\}$.

6.7. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $g : X \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e $c \in \mathbb{R}$ valor regular de g. Sejam $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ tais que $x_0 \neq x_1$, $x_0 \notin S_c(g)$ e $x_1 \notin S_c(g)$, e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto \|x - x_0\| + \|x - x_1\|$.

(1) Mostre que f é derivável em $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0, x_1\}$ e calcule o seu campo gradiente.

(2) Aplique o item anterior e o teorema dos multiplicadores de Lagrange para concluir que, se $x_2 \in S_c(g)$ for ponto crítico da restrição de f a $S_c(g)$, então o plano gerado pelos segmentos $[x_0, x_2]$ e $[x_1, x_2]$ contém a reta normal a $S_c(g)$ em x_2 e que os ângulos formados por estes segmentos com a normal são congruentes. Isso prova, em particular, a *propriedade reflexiva* das elipses: se x_0 e x_1 forem os focos de uma elipse S, então $\|x - x_0\| + \|x - x_1\|$ é constante em S, logo todo ponto de S é ponto de mínimo da restrição de f a S, o que implica que, para todo $x \in S$, os segmentos que ligam x aos focos da elipse formam com a normal a S em x ângulos congruentes; noutras palavras, se um raio de luz for emitido por um dos focos e se refletir na elipse, o raio refletido passará pelo outro foco. Essa propriedade é explorada, por exemplo, na construção de "*whisper chambers*" e de refletores elipsoidais, usados em teatros.

RESPOSTAS

1.1 Apenas a superfície do item **a.**.

1.2 $\pm(\sqrt{\frac{2}{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}})$.

1.5 $X = (1,1,4) + \lambda(-1,1,0), \lambda \in \mathbb{R}$.

1.6 $X = (1,0,-1) + \lambda(2,-9,-5), \lambda \in \mathbb{R}$.

1.7 $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2$

1.8 **a.** $\frac{32}{\sqrt{3}}$; **b.** $(38,6,12)$; **c.** $2\sqrt{406}$.

2.1 **a.** ponto de mín: $(-3,2)$;
b. pontos de mín: $(0,\lambda)$ e $(\lambda,0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$;
c. ponto de mín: $(\frac{1}{3},0)$;
d. pontos de sela: $(0,\lambda)$ e $(\lambda,0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$;
e. pontos de sela: $(0,0), (2,0), (0,2), (2,2)$, ponto de máx:$(1,1)$;
f. pontos de mín: $\pm(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, ponto de sela: $(0,0)$, pontos de máx: $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

2.2 **a.** $a > 0$; **b.** $a < 0$; **c.** não existe; **d.** $a = 0$.

3.1 **a.** valor mín: $f(4,0) = -7$, valor máx: $f(4,5) = 13$;
b. valor mín: $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2e}$, valor máx: $f(x,0) = f(0,y) = 0$, com $x \in [-\sqrt{2}, 0]$ e $y \in [0, \sqrt{2}]$;
c. valor mín: $f(2,-\sqrt{3}) = -2\sqrt{3}$, valor máx: $f(2,\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$;
d. valor mín: $f(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}) = \frac{1}{32} + \left(\frac{15}{16}\right)^2$, valor máx: f(0,1)= 1.

3.2 **a.** valor mín: -16, valor máx: 4;
b. valor mín: $-\frac{2}{\sqrt{3}}$, valor máx: $\frac{2}{\sqrt{3}}$;

c. valor mín: 0, valor máx: $\frac{1}{27}$;

3.3 **a.** valor mín: -14, valor máx: 112;

b. valor mín: $-\frac{11}{4}$, valor máx: 28.

3.4 **a.** pontos de mín: $\pm(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}})$, pontos de máx: $\pm(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$;

b. ponto de mín: $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 1+\frac{2}{\sqrt{5}}, 2+\frac{4}{\sqrt{5}})$, ponto de máx: $(\frac{1}{\sqrt{5}}, 1-\frac{2}{\sqrt{5}}, 2-\frac{4}{\sqrt{5}})$;

c. pontos de mín: $(0,1,-2)$ e $(1,0,-2)$, ponto de máx: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt[4]{2})$;

d. pontos de mín: $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ e $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, pontos de máx: $(0,0,1)$, $(0,1,0)$ e $(1,0,0)$.

3.5 **a.** valor mín: $-19-6\sqrt{7}$, valor máx: $-19+6\sqrt{7}$;

b. valor mín: $-19-6\sqrt{7}$, valor máx: $-\frac{1}{2}$.

3.6 **a.** pontos de mín: $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ e $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$, ponto de máx: $(0,0,-2)$;

b. os mesmos que em **a.**;

c. pontos de mín: $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ e $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$, pontos de máx: $(\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ e $(-\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$;

d. os mesmos que em **c.**;

e. ponto de mín: $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$, pontos de máx: $(-\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{15}}{3}, -\frac{1}{3} \mp \frac{\sqrt{15}}{3}, -\frac{2}{3})$.

4.1 $(1,1)$ e $(-1,-1)$;

4.2 $(0,-1,2)$.

4.3 $n_1 = n_2 = n_3 = \frac{100}{3}$.

4.4 $3\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4.5 Os vértices são $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{3}\right)$.

4.6 Os vértices são $(\pm1, \pm1, 0)$ e $(\pm1, \pm1, 2)$.

4.7 $12(2-\sqrt{3})$, $2(3-\sqrt{3})$ e $4(2\sqrt{3}-3)$.

4.8 $x + y + 2z - 6 = 0$

4.9 $2^{2/5}x + 2^{9/10}y + 2^{9/10}z = 5$; $2^{2/5}x - 2^{9/10}y + 2^{9/10}z = 5$; $2^{2/5}x + 2^{9/10}y - 2^{9/10}z = 5$ e $2^{2/5}x - 2^{9/10}y - 2^{9/10}z = 5$.

4.10 base: 3cm $\times$3cm, altura 1,5cm.

4.11 largura, profundidade e altura iguais a 10 pés.