INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
MAT-2454 — CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II (ESCOLA POLITÉCNICA)
SEGUNDA LISTA DE EXERCÍCIOS - PROFESSOR: EQUIPE DE PROFESSORES

BONS ESTUDOS!

1. DERIVADAS PARCIAIS, DIFERENCIABILIDADE E PLANO TANGENTE

EXERCÍCIOS

1.1. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem das funções:
a. $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$; **b.** $f(x,y) = \ln\left(1+\cos^2(xy^3)\right)$.

1.2. Dada a função $f(x,y) = x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{e}^{\operatorname{sen}(x^2y)}$, ache $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$.

Dica. Neste caso, usar a definição de derivada parcial é menos trabalhoso do que aplicar as regras de derivação.

1.3. Verifique que a função $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ é solução da equação de Laplace bidimensional $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

1.4. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, \text{ se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

a. Mostre que as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existem em todos os pontos.
b. f é contínua em (0,0)?
c. f é diferenciável em (0,0)?

1.5. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, \text{ se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

a. Mostre que f é contínua em $(0,0)$.
b. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
c. f é diferenciável em $(0,0)$?
d. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(0,0)$?

1.6. Seja $g(x,y) = \sqrt[3]{3x^4+2y^4}$. Mostre que g é de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$.

1.7. Determine o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ onde f **não** é diferenciável, sendo:
a. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$; **b.** $f(x,y) = x|y|$; **c.** $f(x,y) = \mathrm{e}^{\sqrt{x^4+y^4}}$; **d.** $f(x,y) = \cos(\sqrt{x^2+y^2})$.

1.8. Ache a equação do plano tangente e a equação da reta normal a cada superfície no ponto indicado:
a. $z = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$, no ponto $(0,0,1)$; **b.** $z = \mathrm{e}^x \ln(\frac{y}{2})$, no ponto $(3,2,0)$.

1.9. Mostre que os gráficos das funções $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ e $g(x,y) = \frac{1}{10}(x^2+y^2) + \frac{5}{2}$ se intersectam no ponto $(3,4,5)$ e têm o mesmo plano tangente nesse ponto.

1.10. Determine uma equação do plano que passa pelos pontos $(0,1,5)$ e $(0,0,6)$ e é tangente ao gráfico de $g(x,y) = x^3y$. Existe um só plano?

1.11. Determine $k \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de $f(x,y) = \ln(x^2 + ky^2)$ no ponto $(2, 1, f(2, 1))$ seja perpendicular ao plano $3x + z = 0$.

1.12. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Mostre que todos os planos tangentes à superfície $z = xf\left(\dfrac{x}{y}\right)$ passam pela origem.

---

2. Regra da Cadeia

Exercícios

2.1. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida de aplicação das regras de derivação parcial.
a. $w = x^2 + y^2; \quad x = t^2 + u^2, y = 2tu.$
b. $w = \dfrac{x}{x^2 + y^2}; \quad x = t\cos u, y = t\,\mathrm{sen}\, u.$

2.2. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R}^2$, com $\nabla f(-2, -2) = (a, -4)$ e

$$g(t) = f(2t^3 - 4t, t^4 - 3t).$$

Determine a para que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 seja paralela à reta $y = 2x + 3$.

2.3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f com derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$ e tal que $2x + y + z = 7$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $\big(0, 2, f(0, 2)\big)$. Seja

$$g(u, v) = uf\big(\mathrm{sen}\,(u^2 - v^3), 2u^2v\big).$$

Determine $a \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de g no ponto $\big(1, 1, g(1, 1)\big)$ seja paralelo ao vetor $(4, 2, a)$.

2.4. Neste exercício vamos explicitar as soluções da equação da onda unidimensional, ou seja, determinar funções $u : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tais que $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $c \in \mathbb{R}$. Este método foi descrito por Jean le Rond d'Alembert em torno de 1750.
a. Mostre que a mudança de coordenadas $\xi = x - ct$ e $\eta = x + ct$ permite escrever a equação da onda na forma $u_{\xi\eta} = 0$.
b. Determine todas as soluções de $u_{\xi\eta} = 0$, concluindo que as soluções da equação original são da forma $u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$, onde f e g são funções reais duas vezes deriváveis.

Observação 2.1. A forma da solução nos diz que ela é a composição de duas ondas arbitrárias viajando em sentidos opostos com velocidade c. Veja uma animação clicando aqui.

2.5. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deriváveis até 2ª ordem. Mostre que $u(x, y) = xf(x + y) + yg(x + y)$ é solução da equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

2.6. Seja $u = u(x, y)$ função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e defina $v(r, \theta) = u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Verifique que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r, \theta) = \Delta u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

sendo Δu, por definição, dado por $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.

2.7. Seja $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função *harmônica* no aberto A, ou seja, $f_{uu} + f_{vv} = 0$, para todo $(u, v) \in A$. Sejam ainda $g, h : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções de classe $\mathcal{C}^2$ no aberto B tais que $\big(g(x, y), h(x, y)\big) \in A$ para todo $(x, y) \in B$ e satisfaçam $g_x = h_y$ e $h_x = -g_y$.
a. Mostre que $g_{xx} + g_{yy} = h_{xx} + h_{yy} = 0$.
b. Mostre que $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} f\big(g(x, y), h(x, y)\big) + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} f\big(g(x, y), h(x, y)\big) = 0.$

2.8. Seja $f = f(x,y)$ função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Se $u(s,t) = f(\mathrm{e}^s\cos t, \mathrm{e}^s \operatorname{sen} t)$, mostre que

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{e}^s\cos t, \mathrm{e}^s\operatorname{sen} t)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{e}^s\cos t, \mathrm{e}^s\operatorname{sen} t)\right]^2 = \mathrm{e}^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}(s,t)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}(s,t)\right)^2\right]$$

e que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathrm{e}^s\cos t, \mathrm{e}^s\operatorname{sen} t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathrm{e}^s\cos t, \mathrm{e}^s\operatorname{sen} t) = \mathrm{e}^{-2s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(s,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(s,t)\right].$$

2.9. Seja $f = f(x,y)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(u,v) = uf(u^2 - v, u + 2v).$$

Sabendo que $3x + 5y = z + 26$ é uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,4,f(1,4))$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,4) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,4) = 1$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,4) = -1$, calcule $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(-2,3)$.

2.10. Seja $F(r,s) = G(\mathrm{e}^{rs}, r^3\cos(s))$, onde $G = G(x,y)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Determine $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(1,0)$ sabendo que $\dfrac{\partial G}{\partial y}(t^2+1, t+1) = t^2 - 2t + 3$.

---

3. Vetor Gradiente e suas aplicações

Exercícios

3.1. Se $f(x,y) = x^2 + 4y^2$, ache o vetor gradiente $\nabla f(2,1)$ e use-o para achar a reta tangente à curva de nível 8 de f no ponto $(2,1)$. Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

3.2. Seja r a reta tangente à curva $x^3 + 3xy + y^3 + 3x = 18$ no ponto $(1,2)$. Determine as retas que são tangentes à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralelas à reta r.

3.3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Fixado um certo $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, sabe-se que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $\big(x_0, y_0,\ f(x_0,y_0)\big)$ tem equação $-2x + 2y - z + 3 = 0$. Determine, entre as curvas abaixo, uma que **não pode** ser a curva de nível de f que contém o ponto P:

a. $\gamma(t) = \left(-\dfrac{1}{t}, t\right)$; **b.** $\gamma(t) = \left(\dfrac{t^5}{5}, -\dfrac{2t^3}{3} + 3t\right)$; **c.** $\gamma(t) = (t^2, t^3 + t)$.

3.4. Considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Suponha que:

(i) a imagem da curva plana $\gamma(t) = (\mathrm{cotg(t)}, \mathrm{sec^2(t)})$, para $t \in]0, \pi/2[$, esteja contida numa curva de nível de f.

(ii) a imagem da curva no espaço $\sigma(u) = \left(\sqrt[3]{u},\ u^2+1,\ \dfrac{u^3}{2} - \dfrac{\sqrt[3]{u}}{2} + 1\right)$, com $u > 0$, esteja contida no gráfico de f.

a. Determine $\nabla f(1,2)$.

b. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,2)$, onde $\vec{v} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

c. Determine uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,2,f(1,2))$.

3.5. O gradiente de $f(x,y) = x^2 + y^4$ é tangente à imagem da curva $\gamma(t) = (t^2, t)$ em um ponto $P = \gamma(t_0)$ com $t_0 > 0$. Considere a curva de nível de f que contém P. Encontre a equação da reta tangente a essa curva no ponto P.

3.6. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\gamma(t) = (t, 2t^2, t^2), t \in \mathbb{R}$, uma curva cuja imagem está contida no gráfico de f. Seja r a reta tangente à curva de nível 4 de f no ponto $(2,8)$. Sabendo que a reta r contém o ponto $(1,-4)$, determine o vetor gradiente de f no ponto $(2,8)$ e a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2,8,f(2,8))$.

3.7. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e seja π o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e seja $\gamma(t) = (1 + \frac{1}{t}, t), t \neq 0$ uma parametrização para a curva de nível 1 de f. Suponha que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ para algum t_0. Determine uma equação para o plano π sabendo que ele contém os pontos $\left(1, 1, \dfrac{1}{2}\right)$ e $(4, 1, 2)$.

3.8. Mostre que $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}$ é contínua em $(0, 0)$ e tem todas as derivadas direcionais em $(0, 0)$. A função f é diferenciável em $(0, 0)$?

3.9. Ache a derivada direcional máxima de f no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.
a. $f(x, y) = xe^{-y} + 3y$ em $(1, 0)$; **b.** $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ em $(1, 2)$.

3.10. Determine todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ nos quais a direção de maior variação da função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ é a do vetor $(1, 1)$.

3.11. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = (t + 1, -t^2)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ é uma curva de nível de f. Sabendo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1, -4) = 2$, determine a derivada direcional de f no ponto $(-1, -4)$ e na direção e sentido do vetor $\vec{u} = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$.

3.12. Sabe-se que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e que o gráfico de f contém as imagens de ambas curvas $\gamma(t) = \left(-\dfrac{t}{2}, \dfrac{t}{2}, \dfrac{t}{2}\right)$ e $\xi(u) = \left(u + 1, u, u + 2 + \dfrac{1}{u}\right)$, $u \neq 0$. Determine $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, onde $\vec{u} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

---

4. Polinômio de Taylor

Exercícios

4.1. Seja $f(x, y) = \ln(x + y)$. Determine o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta do ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Mostre que para todo (x, y) com $x + y > 1$,

$$|\ln(x + y) - (x + y - 1)| < \frac{1}{2}(x + y - 1)^2.$$

4.2. Sejam $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ e $P_1(x, y)$ o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta do ponto $(1, 1)$. Mostre que para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, com $|x - 1| < 1$ e $|y - 1| < 1$,

$$|f(x, y) - P_1(x, y)| < 5(x - 1)^2 + 6(y - 1)^2.$$

Usando $P_1(x, y)$, calcule um valor aproximado para $f(1.001, 0.99)$ e estime o erro cometido com essa aproximação.

4.3. Seja a função $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 8$.
a. Determine o polinômio de Taylor $P_1(x, y)$ de ordem 1 de f, em torno do ponto $(1, 1)$.
b. Escreva a Fórmula de Taylor para o resto $E_1(x, y) = f(x, y) - P_1(x, y)$.
c. Usando o item (b), mostre que, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, com $x > 1/2$ e $y > 1/2$, vale que $E_1(x, y) \geq \frac{3}{2}(x - y)^2$.

---

5. Mais Alguns Exemplos

Exercícios

5.1. Considere $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}, \text{ se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, \text{ se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
a. Mostre que f é diferenciável em $(0, 0)$.
b. As derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(0, 0)$?

5.2. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, \text{ se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

a. Verifique que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = y$ para todo y, e que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 0$, para todo x.

b. Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$ e que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$.

5.3. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, \text{ se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

a. Calcule o gradiente de f no ponto $(0,0)$.

b. Mostre que $\dfrac{d}{dt} f\big(\gamma(t)\big) \neq \nabla f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)$ em $t = 0$, onde $\gamma(t) = (-t,-t)$.

c. Seja $\vec{u} = (m,n)$ um vetor unitário. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$.

d. f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

5.4. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4+y^2}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, \text{ se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Mostre que existem as derivadas direcionais de f em todas as direções no ponto $(0,0)$ e que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \langle \nabla f(0,0), \vec{u} \rangle$ para todo vetor unitário $\vec{u}$. A função f é diferenciável em $(0,0)$?

Respostas

1.1 **a.** $f_x(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ e $f_y(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$
b. $f_x(x,y) = \frac{-y^3 \operatorname{sen}(2xy^3)}{1+\cos^2(xy^3)}$ e $f_y(x,y) = \frac{-3xy^2 \operatorname{sen}(2xy^3)}{1+\cos^2(xy^3)}$.

1.2 -2.

1.4 Não é contínua nem diferenciável em $(0,0)$.

1.5 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$; não é diferenciável em $(0,0)$; nenhumas das derivadas parciais é contínua em $(0,0)$.

1.7 **a.** f não é diferenciável em nenhum ponto da reta $y = -x$.
b. f não é diferenciável nos pontos da forma $(a,0)$ com $a \neq 0$.
c., d. f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ pois é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.

1.8 **a.** $z = 1$ e $r : X = (0,0,1) + \lambda(0,0,1), \lambda \in \mathbb{R}$.
b. $e^3 y - 2z - 2e^3 = 0$ e $r : X = (3,2,0) + \lambda(0,e^3,-2), \lambda \in \mathbb{R}$.

1.10 $6x - y - z + 6 = 0$ (sim, só um).

1.11 $k = 8$.

2.2 $a = 3$.

2.3 $a = -4$.

2.9 21.

2.10 $F_{rr} = s^2 e^{2rs} G_{xx} + 6r^2 e^{rs} s \cos s G_{xy} + 9r^4 \cos^2 s G_{yy} + s^2 e^{rs} G_x + 6r \cos s G_y$; 0.

3.1 $\nabla f(2,1) = (4,8)$; a reta é $r : x + 2y - 4 = 0$.

3.2 $4(x-1) + 5(y-2) = 0$ e $4(x+1) + 5(y+2) = 0$.

3.3 **c.**

3.4 **a.** $\nabla f(1,2) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$; **b.** $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$; **c.** $2x + y - 2z - 2 = 0$.

3.5 $X = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) + \lambda(-1,1), \lambda \in \mathbb{R}$.

3.6 $\nabla f(2,8) = (12,-1)$ e $12x - y - z = 12$.

3.7 $x + y - 2z = 1$.

3.8 f não é diferenciável em $(0,0)$.

3.9 **a.** $\sqrt{5}$ e $(1,2)$; **b.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$ e $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

3.10 nos pontos da reta $x - y + 1 = 0$.

3.11 $\frac{4}{5}$.

3.12 $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

4.2 $P_1(x,y) = 3x + 7y - 5$; $f(1.001, 0.99) \approx 4{,}931$; o erro é de ordem 10^{-3}.

4.3 **a.** $P_1(x,y) = 7$; **b.** $E_1(x,y) = 3\left(c(x-1)^2 - (x-1)(y-1) + d(y-1)^2\right)$, para algum ponto (c,d) interno ao segmento que une (x,y) a $(1,1)$.

5.1 f_x: não; f_y: sim.

5.3 $\nabla f(0,0) = (1,0)$; $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = m^2$; não.

5.4 f não é diferenciável em $(0,0)$.