Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
MAT-2454 — Cálculo Diferencial e Integral II (Escola Politécnica)
Primeira Lista de Exercícios - Professor: Equipe de Professores

Bons Estudos!

1. Curvas, Funções e Superfícies de Nível

Exercícios

1.1. Desenhe as imagens das seguintes curvas, indicando o sentido de percurso:

a. $\gamma(t) = (1, t), t \in \mathbb{R}$;
b. $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$;
c. $\gamma(t) = (\sin t, \sin^2 t), t \in \mathbb{R}$
d. $\gamma(t) = (2 + \cos t, 3 + 4\ \sin t), t \in [-\pi, \pi]$
e. $\gamma(t) = (\frac{1}{2}, 1 - t), t \in [-2, 0]$
f. $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t\ \sin t), t \geq 0$
g. $\gamma(t) = (\sec t, \tan t), t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
h. $\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, 2\sin t), t \in \mathbb{R}$
i. $\gamma(t) = (\sin t, \cos^2 t + 2), t \in \mathbb{R}$
j. $\gamma(t) = (2 + e^{-t}, 3 - e^t), t \geq 0$

1.2. Esboce e parametrize cada conjunto C como uma curva:
a. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4,\ y \geq -x \text{ e } y \geq x\}$
b. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1,\ x < 0 \text{ e } y > -10\}$
c. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1 \text{ e } y < 0\}$
d. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d((x, y), r) = d((x, y), P)\}$, sendo $P = (0, 3)$ e r a reta $y = 4$.
e. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d((x, y), P) + d((x, y), Q) = 10\}$, sendo $P = (2, 0)$ e $Q = (-2, 0)$.
f. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |d((x, y), P) - d((x, y), Q)| = 1, x > 0\}$, com $P = (2, 0)$ e $Q = (-2, 0)$.

Observação 1.1. Para os três últimos itens consulte o texto sobre cônicas disponível no site da disciplina, ou clicando diretamente aqui.

1.3. Mostre que a curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t \cos t),\ t \in \mathbb{R}$ tem duas tangentes em $(0, 0)$ e ache suas equações. Faça um esboço da curva.

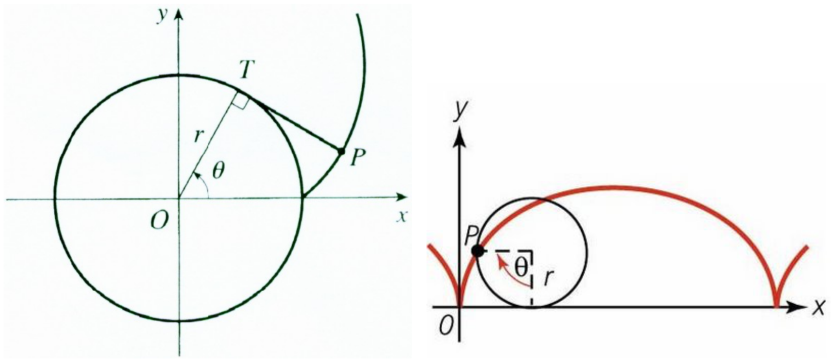
1.4. Considere $f(x) = (\sqrt[3]{x})^2$.
a. Mostre que a função f não é derivável em $x = 0$.
b. Determine uma curva $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, derivável e cuja imagem seja igual ao gráfico de f.
c. Interprete geometricamente o fato de que f não é derivável em $x = 0$, mas a curva γ é derivável em t_0, onde $\gamma(t_0) = (0, 0)$.

1.5. Sejam I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável. Mostre que, se existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\|\gamma(t)\| = C$, para todo $t \in I$, então $\gamma(t)$ é ortogonal a $\gamma'(t)$, para todo $t \in I$. Vale a recíproca? Interprete geometricamente.

1.6. Um barbante é enrolado ao redor de um círculo e então desenrolado, sendo mantido esticado. A curva traçada pelo ponto P no final do barbante é chamada de *involuta* do círculo. Se o círculo tiver raio r e centro O, a posição inicial de P for $(r, 0)$, e se o parâmetro θ for escolhido como na Figura 1(a), mostre que as equações paramétricas da involuta são:

$$x = r(\cos\theta + \theta\sin\theta) \quad \text{e} \quad y = r(\sin\theta - \theta\cos\theta)$$

1.7. Uma circunferência de raio r rola sem escorregar ao longo do eixo Ox. Encontre equações paramétricas para a curva descrita por um ponto da circunferência que se encontra inicialmente no origem. (Esta curva é chamada de *ciclóide*, veja Figura 1(b).)



(A) Involuta do círculo (B) Ciclóide

FIGURA 1. Exercícios 6 e 7

1.8. Para cada função dada, determine o domínio e faça um esboço:

a. $f(x,y)=\sqrt{x-y}$; **b.** $f(x,y)=\operatorname{arctg}(\frac{y}{x})$; **c.** $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$;

d. $f(x,y)=\tan(x-y)$; **e.** $f(x,y)=\dfrac{x}{y^x}$; **f.** $f(x,y)=\ln(xy^2-x^3)$;

g. $f(x,y)=\ln(16-4x^2-y^2)$.

1.9. Esboce uma família de curvas de nível das seguintes funções:

a. $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$; **b.** $f(x,y)=x-\sqrt{1-y^2}$;

c. $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2-y^2}$; **d.** $f(x,y)=\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$.

1.10. Encontre uma parametrização para a curva de nível k de f nos casos:

a. $f(x,y)=x+2y-3, k=-2$; **b.** $f(x,y)=x-\sqrt{1-2y^2}, k=5$; **c.** $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2-y^2}, k=1$.

Determine a reta tangente às curvas acima nos pontos $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$, $(6,0)$ e $(\sqrt{2},1)$, respectivamente.

1.11. Esboce os gráficos de:

a. $f(x,y)=1-x-y$; **b.** $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+1}$; **c.** $f(x,y)=\sqrt{x^2+9y^2}$;

d. $f(x,y)=4x^2+y^2$; **e.** $f(x,y)=y^2-x^2$; **f.** $f(x,y)=y^2+1$;

g. $f(x,y)=y^2+x$; **h.** $f(x,y)=xy$; **i.** $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^2}}$;

j. $f(x,y)=\dfrac{1}{4x^2+9y^2}$; **k.** $f(x,y)=(x-y)^2$; **l.** $f(x,y)=x^2+y^2+2y+3$;

m. $f(x,y)=\dfrac{1}{(x^2+2y^2)^2}$; **n.** $f(x,y)=\ln(9x^2+y^2)$; **o.** $f(x,y)=2-\sqrt[4]{x^2+4y^2}$;

p. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-9}$; **q.** $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1}$; **r.** $f(x,y)=\sqrt{y-2x^2-1}$.

1.12. Seja $\gamma(t)=(e^t+1,e^{-t})$, para $t\in\mathbb{R}$.

a. Desenhe a imagem de γ, indicando o sentido de percurso.

b. A imagem de γ está contida numa curva de nível da função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=x^2y^2-2y-y^2+4$? Em caso afirmativo, em qual nível?

1.13. Em cada caso, esboce a superfície formada pelo conjunto dos pontos $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tais que:

a. $x+2y+3z=1$; **b.** $x^2+2y^2+3z^2=1$; **c.** $x^2+y^2-z^2=0$;

d. $x^2+y^2-z^2=-1$; **e.** $x^2+y^2-z^2=1$; **f.** $x^2-y^2=1$;

g. $x^2-y^2+z^2=1$.

Alguma dessas superfícies é gráfico de uma função $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$?

1.14. Verifique que imagem da curva γ está contida na superfície S e faça um esboço dessa imagem.

a. $\gamma(t) = (\cos t, \cos t, \sqrt{2}\sin t)$, $t \in [0, \pi[$ e S é uma esfera com centro em $(0,0,0)$;

b. $\gamma(t) = (\sqrt{t^2+1}\cos t, \sqrt{t^2+1}\sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$ e $S : x^2 + y^2 - z^2 = 1$;

c. $\gamma(t) = (t\,\cos t, t\,\sin t, \sqrt{t^2+4})$, $t \geq 0$ e S é o gráfico de $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+4}$.

1.15. Sejam $\gamma(t) = (2 - \cos t, \sec^2 t + 3), t \in [0, \frac{\pi}{2}[$ e $f(x,y) = ((x-2)^2(y-3))^{\frac{2}{3}} + 1$. Esboce a imagem de γ. Mostre que essa imagem está contida em uma curva de nível de f e indique qual é o nível.

1.16. Sejam $g(x,y) = (x-2)^2 + (y-3)^2 + 1$ e $\Gamma(t) = (2-t, 3+t, z(t)), t \in \mathbb{R}$. Sabendo que a imagem (trajetória) de Γ está contida no gráfico de g, encontre $z(t)$. Esboce ainda a imagem de Γ.

1.17. Desenhe a imagem de cada uma das seguintes curvas:

a. $\gamma(t) = (1, t, 1)$; **b.** $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 2)$;

c. $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, e^{-t}), t \geq 0$; **d.** $\gamma(t) = (t, \cos t, \sin t), t \geq 0$;

e.$\gamma(t) = (\sin t, \sin t, \sqrt{2}\cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$; **f.** $\gamma(t) = (1 + \sin t, 1 + \sin t, \cos t)$.

1.18. Em cada caso, encontre uma parametrização para C e para a reta tangente a C no ponto P:

a. $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ e } z = x+1\}$ e $P = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$.

b. $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ e } (x-1)^2+y^2+(z-1)^2 = 1\}$ e $P = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$.

c. $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y^2 - x^2 \text{ e } x^2+y^2 = 1\}$ e $P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.

d. $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-2z^2 = 1 \text{ e } y = 2z+1\}$ e $P = (-\sqrt{2}, -1, -1)$.

e. $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \text{ e } x^2+y^2 = z\}$ e $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

f. $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{4x^2+y^2} \text{ e } z = 2x+1\}$ e $P = (0,1,1)$.

1.19. Seja $f(x,y) = \dfrac{2x^2+4y^2}{x^2+y^2+1}$.

a. Esboce as curvas de nível de f dos níveis $c = 1$, $c = 2$ e $c = 3$.

b. Encontre uma curva derivável γ, definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, cuja imagem seja a curva de nível de f do nível $c = 1$.

c. Determine o vetor tangente à curva γ, que você encontrou no item anterior, no ponto $(-1, 0)$.

d. Seja $\Gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\Gamma(t) = (\sin t, \cos t, z(t))$. Sabendo que a imagem da curva está contida no gráfico de f, encontre o vetor tangente a Γ em $\Gamma(\frac{\pi}{3})$.

2 **a.** $\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t), t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$;
b. $\gamma(t) = (t, \frac{1}{t}), t \in]-\infty, -\frac{1}{10}[$;
c. $\gamma(t) = (1 + 2\tan t, 3\sec t), t \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$;
d. $\gamma(t) = (t, \frac{1}{2}(7 - t^2)), t \in \mathbb{R}$;
e. $\gamma(t) = (5\cos t, \sqrt{21}\sin t), t \in [0, 2\pi[$;
f. $\gamma(t) = (\frac{1}{2}\sec t, \frac{\sqrt{15}}{2}\tan t), t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
3 $y = x$ e $y = -x$.
4 **b.** $\gamma(t) = (t^3, t^2)$ $t \in \mathbb{R}$.
8 **a.** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x\}$;
b. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$;
c. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$;
d. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x + \frac{1+2k}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
e. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$;
f. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x(y-x)(y+x) > 0\}$;
g. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 < 16\}$.
10 **a.** $\gamma(t) = (t, \frac{1}{2}(1-t)), t \in \mathbb{R}$
$X = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) + \lambda(2, -1), \lambda \in \mathbb{R}$
b. $\gamma(t) = (5 + \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t), t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$X = (6, 0) + \lambda(0, 1), \lambda \in \mathbb{R}$
c. $\gamma(t) = (\sec t, \tan t), t \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$
$X = (\sqrt{2}, 1) + \lambda(\sqrt{2}, 2), \lambda \in \mathbb{R}$
d. $k = 1$: elipse; $k = 2$: um par de retas paralelas; $k = 3$: uma hipérbole.
12 **b.** Sim, no nível 5.
13 Apenas a superfície do item **a.**.
15 no nível 2.
16 $z(t) = 2t^2 + 1$.
18 **a.** $\gamma(t) = \frac{1}{2}(\cos t - 1, \sqrt{2}\sin t, \cos t + 1), t \in [0, 2\pi[$
$X = (\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}) + \lambda(-1, 0, -1), \lambda \in \mathbb{R}$;
b. $\gamma(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos t, \sqrt{2}\sin t, \cos t + 1), t \in [0, 2\pi[$
$X = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}) + \lambda(1, 0, -1), \lambda \in \mathbb{R}$;
c. $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, -\cos(2t)), t \in [0, 2\pi[$
$X = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) + \lambda(-1, 1, 2\sqrt{2}), \lambda \in \mathbb{R}$;
d. $\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, -1 + 2\sin t, -1 + \sin t), t \in [0, 2\pi[$
$X = (-\sqrt{2}, -1, -1) + \lambda(0, 2, 1), \lambda \in \mathbb{R}$;
e. $\gamma(t) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t), t \in [0, 2\pi[$
$X = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \lambda(1, 0, 1), \lambda \in \mathbb{R}$;
f. $\gamma(t) = (\frac{1}{4}(t^2 - 1), t, \frac{1}{2}(t^2 + 1))$, $t \in \mathbb{R}$
$X = (0, 1, 1) + \lambda(1, 2, 2), \lambda \in \mathbb{R}$.
19 **a.** $c = 1$: $x^2 + 3y^2 = 1$; $c = 2$: $y = 1$ e $y = -1$; $c = 3$: $-\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} = 1$;
b. $\gamma(t) = (\sin t, \frac{\cos t}{\sqrt{3}}), t \in [0, 2\pi]$;
c. $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$;
d. $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

2. LIMITES E CONTINUIDADE

EXERCÍCIOS

2.1. Calcule os seguintes limites, caso existam. Justifique quando não existirem:

a. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$; **b.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$;

c. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$; **d.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^4+x^2y+y^2}$;

e. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$; **f.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$;

g. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3-y}$; **h.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4\,\sin(x^2+y^2)}{x^4+y^2}$;

i. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$; **j.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}\sin\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$;

k. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y+y^4+x^4}{x^3y-xy^3}$; **l.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+\sin(x^2+y^2)}{y^4+\sin(x^2+y^2)}$;

m. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^4+x^5\sqrt[3]{y^4}}{x^6+y^8}$; **n.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3(1-\cos(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^3}$.

2.2. Decida se os limites abaixo existem, determinando seu valor em caso afirmativo:

a. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$; **b.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$;

c. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2\ln(3x^2+y^2)\arctan\left(\dfrac{1}{y^2-x^2}\right)$; **d.** $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} x^2\ln(3x^2+y^2)\arctan\left(\dfrac{1}{y^2-x^2}\right)$.

2.3. Determine os pontos de continuidade da seguinte função

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x^2-y^2)(x-1)^2}{(x^2+y^2)[(x-1)^2+(y-1)^2]}, \text{ se } (x,y)\neq(0,0) \text{ e } (x,y)\neq(1,1);\\ 1, \text{ se } (x,y)=(0,0);\\ 0, \text{ se } (x,y)=(1,1).\end{cases}$$

2.4. Seja

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^4}{x^4+y^2}\sin\left(e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\right), \text{ se } (x,y)\neq(0,0);\\ L, \text{ se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Existe algum número real L para o qual f seja contínua em $(0,0)$? Justifique.

2.5. Seja $f(x,y)=\dfrac{3(x-1)^2+(y-1)^2}{x^2-y^2}$.

a. Num mesmo sistema de coordenadas, esboce as curvas de nível de f nos níveis $k=1$ e $k=3$.

b. Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$? *Justifique.*

RESPOSTAS

1 **a.** não existe; **b.** 0; **c.** 0; **d.** não existe; **e.** não existe; **f.** não existe **g.** não existe; **h.** 0; **i.** 0; **j.** 0; **k.** não existe; **l.** 1; **m.** não existe; **n.** 0.

2 **a.** 1; **b.** 0; **c.** 0; **d.** não existe.

3 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x,y)\neq(0,0)\}$.

4 $L=0$.

5 O limite não existe.