APLICAÇÕES DO AXIOMA DO SUPREMO PARA FUNÇÕES CONTÍNUAS

ALEXANDRE LYMBEROPOULOS

1. Introdução

Nestas poucas linhas vamos enunciar e demonstrar algumas consequências importantes do Axioma do Supremo para as funções contínuas. Vamos começar recordando a definição de supremo de um conjunto.

Definição 1.1. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto. O *supremo de* A, se existir, é o número real

$$\sup A = \min_{y \in \mathbb{R}} \{y : x \leq y, \text{ para todo } x \in A\}.$$

Em outras palavras $\sup A$, é a menor cota superior do conjunto A.

Existem conjuntos que não admitem supremo como, por exemplo, $A = \emptyset$ ou $A = \mathbb{R}$ (por que?). A validade do Axioma do Supremo (1.1) é um fato que, de certa maneira, distingue o conjunto dos números racionais dos reais. Lembramos que um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é *limitado superiormente* se existe $M > 0$ tal que $|x| \leq M$ para todo $x \in A$. Vamos ao enunciado desta importante propriedade:

Axioma 1.1 ((do Supremo)**.** *Todo conjunto não vazio e limitado superiormente de números reais admite supremo.*

A distinção entre racionais e reais mencionada anteriormente pode ser ilustrada no

Exemplo 1.1. Seja $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$, que é claramente um conjunto não vazio ($0 \in A$) e limitado superiormente (por $3/2$, por exemplo). Não existe um número racional que seja a menor cota superior de A, já que se r_1 é uma cota superior racional qualquer de A então $r_1 > 0$ e $r_1^2 > 2$, já que não existe racional cujo quadrado seja 2. Existe um racional r_2 tal que $2 < r_2^2 < r_1^2$ e portanto $r_2 < r_1$ é uma cota superior racional de A.

Considerando $A \subset \mathbb{R}$ podemos mostrar que $\sup A = \sqrt{2}$. De fato:

- se $y > \sqrt{2}$ então $y^2 > 2$ e, tomando $\tilde{y} = (y + \sqrt{2})/2$, temos $(\tilde{y})^2 > 2$ com $\tilde{y} < y$, pois $\tilde{y} - y = (\sqrt{2} - y)/2 < 0$. Logo y não é a menor cota superior de A, não podendo ser $\sup A$.
- se $y < \sqrt{2}$ então $y^2 < 2$ e, tomando $\tilde{y} = (y + \sqrt{2})/2$, teremos $y < \tilde{y}$ e $(\tilde{y})^2 < 2 \implies y \in A$, donde y não é uma cota superior para A, não podendo ser $\sup A$.

Como A é um conjunto de números reais não vazio e limitado superiormente, deve existir $\sup A$. Em vista das considerações acima devemos ter $\sup A = \sqrt{2}$.

2. Funções Contínuas e o Axioma do Supremo

Neste ponto já podemos enunciar os resultados sobre funções contínuas que decorrem do Axioma do Supremo.

Teorema 2.1 (do Valor Intermediário)**.** *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, $a < b \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) \leq y \leq f(b)$. Então existe $x \in [a, b]$ tal que $y = f(x)$.*

Antes de passar à demonstração desse teorema vejamos algumas aplicações. Podemos utilizar o teorema 2.1 para localizar raízes de equações em uma variável que envolvam funções contínuas.

Exemplo 2.1. Sabemos, da teoria algébrica dos polinômios, que a equação

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 7 \tag{2.1}$$

admite pelo menos uma raiz real. Porém esta teoria não nos permite estimar seu valor. Para tanto consideramos a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, que é contínua, e observamos que

$$f(0) = 0 < 7 < 24 = f(4).$$

O Teorema do Valor Intermediário garante então que existe $0 < x_0 < 4$ tal que $f(x_0) = 7$, ou seja, uma solução para a equação. Ainda da teoria algébrica de polinômios sabemos que os candidatos racionais a solução de (2.1) são ± 1 e ± 7 que não são de fato soluções, logo x_0 é irracional.

É possível melhorar estimativas, diminuindo o tamanho do intervalo onde se encontra x_0: como $0 = f(2) < 7 < f(4) = 24$ concluímos que uma solução da equação encontra-se em $[2,4]$. Note que, em princípio, isso não impede a existência de outra solução no intervalo $[0,2]$[1].Repetindo o método temos $f(3) = 6 < 7 < f(4)$ e portanto há uma solução no intervalo $[3,4]$. Iterando essa ideia podemos obter intervalos arbitrariamente pequenos contendo uma solução desta equação.

Observação 2.1. A quantidade de soluções num dado intervalo pode ser abordada estudando o crescimento da função que define a equação usando, quando possível, a primeira derivada.

Exemplo 2.2. Mostremos que existe $x_0 \in]0,1[$ tal que $x_0 e^{-x_0} = 1/3$. De fato, considerando $f(x) = xe^{-x}$, que é contínua, temos $f(0) = 0 < 1/3 < 1/e = f(1)$, já que $e < 3$.

Vamos então demonstrar o Teorema do Valor Intermediário:

Demonstração: Considere o conjunto

$$S = \{x \in [a,b] : f(x) \leq y\}.$$

Como $a \in S$ temos $S \neq \emptyset$; $x \leq b$ para todo $x \in S$ garante que S é limitado superiormente. Pelo Axioma 1.1, seja $u = \sup S$. Analisemos as possibilidades:

- Suponha $f(u) > y$. Como f é contínua, existe um intervalo aberto I, $u \in I$, tal que $f(x) > y$ para todo $x \in I$. Se $t \in I$ e $t < u$ temos que para todo $x \in [t,u]$ vale $f(x) > y$, donde $x \notin S$ e portanto u não é a menor cota superior de S, não podendo ser $\sup S$. Uma contradição, logo $\boxed{f(u) \leq y}$.
- Suponha $f(u) < y$. Novamente da continuidade de f, existe intervalo aberto J, $u \in J$, tal que $f(x) < y$, para todo $x \in J$. Todo $x > u$ em $J \cap [a,b]$ satisfaz $f(x) < y$, donde $x \in s$ e portanto u não é cota superior de S. Outra contradição, portanto $\boxed{f(u) \geq y}$.

Então a única possibilidade é $f(u) = y$. □

Observação 2.2. A recíproca do Teorema 2.1 é falsa, ou seja, não é verdade que se uma função atinge todos os valores num intervalo do contra-domínio ela é contínua então é ela é contínua. Como contra-exemplo considere

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}), x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases} \quad ,$$

[1]Represente graficamente tal situação.

que assume todos os valores no intervalo $[-1,1]$, mas não é contínua em $x_0 = 0$.

Corolário 2.2 (Teorema do Anulamento)**.** *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(a)f(b) \leq 0$, existe $c \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = 0$.*

Demonstração: Exercício. $\square$

Exemplo 2.3. Dada qualquer função contínua definida num círculo existem dois pontos antípodas[2] nos quais a função assume o mesmo valor.

De fato, cada ponto P do círculo (que vamos supor centrado na origem) é determinado pelo ângulo[3] entre o eixo Ox e o raio que passa pelo ponto P. Deste modo a função definida no círculo pode ser vista como uma função definida no intervalo $[0, 2\pi[$. Sejam A e B os pontos de interseção do cículo com o eixo Ox. Defina então $d : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ por

$$d(\theta) = f(x) - f(y),$$

onde x é o ponto do círculo que faz ângulo θ com o eixo Ox e y o antípoda de x. Assim,

$$d(0) = f(A) - f(B) \quad \text{e} \quad d(\pi) = f(B) - f(A) = -d(0).$$

Pelo Corolário 2.2, existe $\theta_0 \in [0, \pi]$ tal que $d(\theta_0) = 0$, ou seja, $f(x) = f(y)$.

Vamos considerar o problema da existência de máximos e mínimos para funções contínuas num intervalo fechado. Mas antes disso precisamos de alguma nomenclatura e resultados preliminares.

Definição 2.1. Uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *limitada* se existe $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$, para todo $x \in A$.

Lema 2.3. *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $a < b$ números reais. Então*

$$f\big([a,b]\big) = \big\{f(x) : x \in [a,b]\big\}$$

é limitado.

Em outras palavras, toda função contínua num intervalo fechado é limitada.

Demonstração: Seja $S = \big\{x \in [a,b] : f\big([a,x]\big) \text{ é limitado}\big\}$. O conjunto S é não vazio, pois $a \in S$, e limitador superiormente por b. Existe então $u = \sup S$. Como f é contínua, tomando $\epsilon = 1$ temos que existe um intervalo aberto I, $u \in I$ tal que $|f(x) - f(u)| < 1$. Se $t \in I$ e $t < u$ temos que t não é cota superior de S (pois u é a menor delas), donde existe $x \in S$ tal que $t < x \leq u$, donde $f\big([a,x]\big)$ é limitado. Além disso, $f\big([x,u]\big) \subseteq I$ também é limitado, pois $|f(x) - f(u)| < 1 \implies f(u) - 1 < f(x) < f(u) + 1$. Assim $f\big([a,u]\big)$ é limitado.

Suponha agora que $u < b$ e escolha $v \in I$ com $u < v < b$. Então $f\big([u,v]\big)$ é limitado e portanto $v \in S$ e $v > \sup S$, uma contradição. Logo $u = b$ (por que não pode ser maior que b?) e portanto $f\big([a,b]\big)$ é limitado. $\square$

Definição 2.2. Seja $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que x_0 é *ponto de máximo local* (respec. mínimo local) de f se existe intervalo I, com $x_0 \in I$, tal que $f(x_0) \geq f(x)$ (respec. $f(x_0) \leq f(x)$), para todo $x \in I \cap A$.

Dizemos ainda que x_0 é *ponto de máximo* (respec. de mínimo) f se $f(x_0) \geq f(x)$ (respec. $f(x_0) \leq f(x)$), para todo $x \in A$.

Observação 2.3. Para enfatizar um ponto de máximo ou mínimo podemos dizer ponto de máximo ou mínimo *global*.

[2] Ou seja, pontos diametralmente opostos.

[3] no sentido anti-horário, para fixar

Teorema 2.4 (de Weierstrass). *Seja $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $[a,b] \subseteq A$ um intervalo fechado. Então f admite ponto de máximo e de minimo (globais) em $[a,b]$.*

Demonstração: Do Lema 2.3, temos que $f\big([a,b]\big)$ é um conjunto limitado e claramente não vazio, pois contém $f(a)$. Seja então $M = \sup f\big([a,b]\big)$. Defina também o conjunto

$$S = \big\{x \in [a,b] : \sup f\big([x,b]\big) = M\big\} \quad \text{e} \quad u = \sup S.$$

Suponha que $f(u) < M$. Da continuidade de f com $\epsilon = \frac{M-f(u)}{2}$, existe um intervalo aberto I, $u \in I$ tal que

$$|f(x) - f(u)| < \frac{M - f(u)}{2} \implies f(x) < \frac{M + f(u)}{2},$$

e portanto

$$\sup f(I) < M. \tag{2.2}$$

Sejam $t \in I, t < u$ e $x \in I$, com $t < x < u$. Então $x \in S$ e portanto $\sup f\big([x,b]\big) = M$. De (2.2) temos que $\sup f\big([x,u]\big) < M$. Se $v \in I$ é tal que $u < v < b$, então $\sup f\big([x,v]\big) < M$, donde $\sup f\big([v,b]\big) = M$, ou seja, $v \in S$, uma contradição. Logo $f(u) = M$.

Finalmente, se f é contínua então $-f$ também o é, portanto admite um ponto de máximo x_0 em qualquer intervalo fechado $[a,b]$. É fácil ver que x_0, sendo ponto de máximo de $-f$, será um ponto de mínimo de f. □

Observação 2.4. O teorema acima garante a existência do máximo (e mínimo) para toda função contínua em qualquer intervalo fechado. Infelizmente a demonstração acima não apresenta um algoritmo para determiná-lo[4]. Com a hipótese adicional de derivabilidade de f no interior do intervalo $[a,b]$ é possível determinar condições que os candidatos a máximo ou mínimo devem satisfazer, mas isso é assunto para as próximas aulas... Acompanhe!

[4]Na verdade não é conhecido um tal algoritmo.