MAT-2453 – RESOLUÇÃO DE ALGUMAS QUESTÕES DA 2ª LISTA DE EXERCÍCIOS

GLÁUCIO TERRA

Questão 1. O objetivo desta questão é demonstrar como a *lei da reflexão plana* e a *lei da refração de Snellius*, da Óptica Geométrica, podem ser obtidas como conseqüências do *princípio de Fermat*, segundo o qual "a trajetória dos raios de luz é aquela que minimiza o tempo de percurso".

a. (REFLEXÃO PLANA) Sejam $P = (0, a)$ e $Q = (b, c)$, onde a, b, c são números reais positivos. Seja $M = (x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$ (vide Figura 1). Seja $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $d(x)$ é a soma das distâncias $d(P, M) + d(M, Q)$. Mostre que a função d possui um único ponto de mínimo $x_0 \in \mathbb{R}$. Verifique que $x_0 \in]0, b[$ e que $\alpha = \beta$ se $x = x_0$.

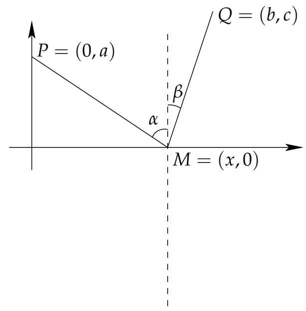


FIGURA 1. Reflexão Plana

OBSERVAÇÃO: Note que, admitindo que a luz se propague com velocidade constante no semi-plano superior, minimizar a soma das distâncias $d(P, M) + d(M, Q)$ é equivalente a minimizar o tempo que um raio de luz leva para ir de P a Q, refletindo-se no eixo Ox.

b. (LEI DE REFRAÇÃO DE SNELLIUS) Sejam $P \in \mathbb{R}^2$ um ponto no semi-plano superior e $Q \in \mathbb{R}^2$ um ponto no semi-plano inferior, fixos (vide Figura 2). Uma partícula vai de P a um ponto $M = (x, 0)$ sobre o eixo Ox com velocidade constante u e movimento retilíneo; em seguida, vai de M até Q com velocidade constante v, também em movimento retilíneo. Seja $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $T(x)$ é o tempo de percurso de P a Q. Mostre que T possui um único ponto de mínimo $x_0 \in \mathbb{R}$. Verifique que $x_0 \in]0, b[$ e que, se $x = x_0$, então:

$$\frac{\sin\alpha}{u} = \frac{\sin\beta}{v}.$$

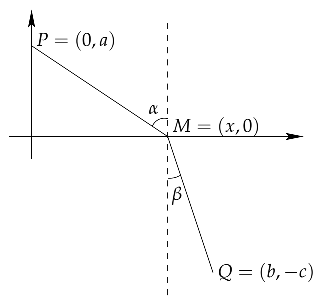


FIGURA 2. Refração

Solução. SOLUÇÃO DO ITEM "B"

O tempo que a partícula gasta para ir de P a Q, passando por $M = (x, 0)$, é dado por $\frac{d(P,M)}{u} + \frac{d(M,Q)}{v}$. Assim, $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $T(x) = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{u} + \frac{\sqrt{(x-b)^2+c^2}}{v}$. Portanto, pela regra da cadeia, T é duas vezes derivável e suas derivadas primeira e segunda são dadas por

$$T'(x) = \frac{1}{u}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{1}{v}\frac{x-b}{\sqrt{(x-b)^2+c^2}},$$

$$T''(x) = \frac{1}{u}\frac{\sqrt{x^2+a^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x^2+a^2} + \frac{1}{v}\frac{\sqrt{(x-b)^2+c^2} - \frac{(x-b)^2}{\sqrt{(x-b)^2+c^2}}}{(x-b)^2+c^2} = \frac{1}{u}\frac{a^2}{(x^2+a^2)^{3/2}} + \frac{1}{v}\frac{c^2}{((x-b)^2+c^2)^{3/2}}.$$

Assim, $T''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $T'(0) < 0$, $T'(b) > 0$ e T' é contínua, pelo teorema do valor intermediário existe $x_0 \in]0, b[$ tal que $T'(x_0) = 0$; como $T'' > 0$, T' é crescente e, em particular, injetiva, portanto x_0 é a única raiz de T'. Pelo teste da derivada segunda, conclui-se que x_0 é ponto de mínimo de T, e é o único ponto de mínimo, pois, pelo teorema de Fermat, se houvesse algum outro, também seria ponto crítico, e já vimos que x_0 é a única raiz de T'. Então está demonstrado que T possui um único ponto de mínimo x_0, e x_0 pertence ao intervalo $]0, b[$. Além disso, como $\sin\alpha(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$ e $\sin\beta(x) = -\frac{x-b}{\sqrt{(x-b)^2+c^2}}$, $T'(x_0) = 0$ é equivalente a $\frac{\sin\alpha(x_0)}{u} - \frac{\sin\beta(x_0)}{v} = 0$.

Questão 2. Deve-se construir uma estrada ligando uma fábrica A a uma ferrovia que passa por uma cidade B. Assumindo-se que a estrada e a ferrovia sejam ambas retilíneas, e que os custos de frete por unidade de distância sejam m vezes maiores na estrada do que na ferrovia, encontre o ângulo α a que a estrada deve ser conectada à ferrovia de modo a minimizar o custo total do frete da fábrica até a cidade. Assuma $m > 1$.

Solução. Sejam: d a distância da fábrica à cidade, b a distância a ser percorrida na rodovia, a a distância a ser percorrida na ferrovia, e ângulos como na Figura 3.

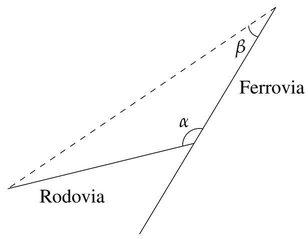


FIGURA 3. Ferrovia e Rodovia

Denotando por C o custo total do frete e por f o custo do frete por unidade de distância na ferrovia, tem-se: $C = fa + mfb$. Pelo teorema dos senos, tem-se:

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{d} = \frac{\sin\gamma}{a},$$

donde $b = \dfrac{d\sin\beta}{\sin\alpha}$, $a = \dfrac{d\sin\gamma}{\sin\alpha} = \dfrac{d\sin\big(\pi-(\alpha+\beta)\big)}{\sin\alpha} = \dfrac{d(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)}{\sin\alpha}$. Portanto,

$$\frac{C}{f} = \frac{d(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)}{\sin\alpha} + m\frac{d\sin\beta}{\sin\alpha} = d\cos\beta + d\sin\beta\frac{m+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Assim sendo, o problema se reduz a encontrar (caso exista) o(s) ponto(s) de mínimo da função contínua $F\colon [\frac{\pi}{2}, \pi-\beta] \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(\alpha) = d\cos\beta + d\sin\beta\frac{m+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

A referida função é derivável no interior de seu domínio, e sua derivada é dada por

$$F'(\alpha) = d\sin\beta\frac{-\sin^2\alpha - \cos\alpha(m+\cos\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{d\sin\beta(-1-m\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}.$$

Tomando $g :]\frac{\pi}{2}, \pi[\to \mathbb{R}$ dada por $g(\alpha) = -1 - m\cos\alpha$, g é derivável e $g'(\alpha) = m\sin\alpha > 0, \forall\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, logo g é estritamente crescente; como g se anula em $\arccos(-\frac{1}{m})$[1], segue $g < 0$ em $[\frac{\pi}{2}, \arccos(-\frac{1}{m})[$ e $g > 0$ em $]\arccos(-\frac{1}{m}), \pi[$. Assim:

(i) se $\arccos(-\frac{1}{m}) < \pi - \beta$, tem-se $F' < 0$ em $]\frac{\pi}{2}, \arccos(-\frac{1}{m})[$ e $F' > 0$ em $]\arccos(-\frac{1}{m}), \pi-\beta[$ e, por um corolário do teorema do valor médio, conclui-se que $\arccos(-\frac{1}{m}) = \pi - \arccos(\frac{1}{m})$ é ponto de mínimo de F;

[1] note que $m > 1$ por hipótese, portanto $-\frac{1}{m}$ está no domínio da função arccos

(ii) se $\arccos(-\frac{1}{m}) \geq \pi - \beta$, tem-se $F' < 0$ em $]\frac{\pi}{2}, \pi - \beta[$ e, novamente por um corolário do teorema do valor médio, conclui-se que $\pi - \beta$ é ponto de mínimo de F.

Assim, o ponto de mínimo de F é $\min\{\pi - \arccos(\frac{1}{m}), \pi - \beta\}$.

Questão 3. Dois corredores com largura $a > 0$ e $b > 0$ intersectam-se em ângulo reto. Determine o comprimento máximo l de uma escada que pode ser transportada horizontalmente de um corredor para o outro.

Solução. Sem perda de generalidade, pode-se assumir que a escada de comprimento máximo será transportada de um corredor para o outro de tal forma que suas extremidades se apóiem sobre as paredes externas, conforme a figura abaixo.

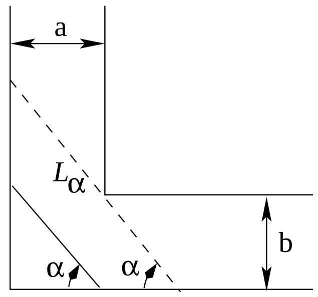


FIGURA 4. Escada

Ao ser feito o transporte, o ângulo α que a escada forma com a parede do corredor de largura b variará de 0 a $\frac{\pi}{2}$. Para cada $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ fixo, o comprimento máximo L_α da escada que pode ser colocada nos corredores, formando um ângulo α com o corredor de largura b, será, conforme a figura, $\frac{b}{\sin\alpha} + \frac{a}{\cos\alpha}$. Assim, o transporte será possível se, e somente se, o comprimento da escada for menor ou igual a L_α, para todo $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$. O máximo comprimento da escada que pode ser transportada será, portanto, o valor mínimo (caso exista) da função $f :]0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, dada por

$$f(\alpha) = \frac{b}{\sin\alpha} + \frac{a}{\cos\alpha}.$$

Tal função é derivável e sua derivada é dada por

$$f'(\alpha) = -\frac{b\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{a\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{-b\cos^3\alpha + a\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}.$$

Seja $g :]0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ dada por

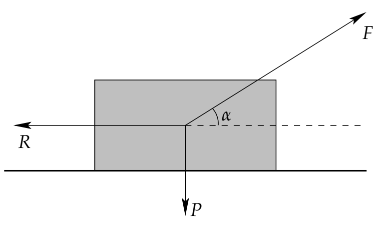
$$g(\alpha) = -b\cos^3\alpha + a\sin^3\alpha.$$

Esta função é derivável e sua derivada, definida no mesmo domínio, é dada por

$$g'(\alpha) = 3b\cos^2\alpha\sin\alpha + 3a\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

Portanto $g' > 0$ em todo o seu domínio, donde g é estritamente crescente. Como g se anula em $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tal que $\tan\alpha = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, i.e. $\alpha = \arctan\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, segue que $g < 0$ em $]0, \arctan\sqrt[3]{\frac{b}{a}}[$ e $g > 0$ em $]\arctan\sqrt[3]{\frac{b}{a}}, \frac{\pi}{2}[$. Logo, $f' < 0$ em $]0, \arctan\sqrt[3]{\frac{b}{a}}[$ e $f' > 0$ em $]\arctan\sqrt[3]{\frac{b}{a}}, \frac{\pi}{2}[$. Então, pelo teste da derivada primeira, $\arctan\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ é ponto de mínimo de f, logo o valor mínimo de f é $f(\arctan\sqrt[3]{\frac{b}{a}}) = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$.

Questão 4. Um corpo de peso P apoiado sobre um plano horizontal deve ser deslocado horizontalmente pela aplicação de uma força F. Qual o ângulo α com a horizontal deve formar a força para que a intensidade da mesma necessária para mover o corpo seja mínima, admitindo coeficiente de atrito $\mu > 0$?



Solução. Para cada $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ fixo, o valor mínimo da força F para movimentar o bloco é tal que a diferença entre a componente horizontal de F e a força de atrito R seja positiva, i.e. $F\cos\alpha - \mu(P - F\sin\alpha) \geq 0$, ou seja, $F \geq \frac{\mu P}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$. Assim sendo, o problema se reduz a encontrar o(s) ponto(s) de mínimo da função contínua $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, dada por $f(\alpha) = \dfrac{\mu P}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$.

A referida função é derivável, e sua derivada é dada por $f'(\alpha) = -\dfrac{\mu P(-\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)^2}$, para todo $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Tomando $g : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ dada por $g(\alpha) = \sin\alpha - \mu\cos\alpha$, g é contínua e derivável (no interior do intervalo) com $g'(\alpha) = \cos\alpha + \mu\sin\alpha > 0$, logo g é estritamente crescente. Como g se anula em $\arctan\mu$, segue $g < 0$ em $[0, \arctan\mu)$ e $g > 0$ em $(\arctan\mu, \frac{\pi}{2}]$, portanto $f' < 0$ em $[0, \arctan\mu)$ e $f' > 0$ em $(\arctan\mu, \frac{\pi}{2}]$. Assim, pelo teste da derivada primeira, conclui-se que $\arctan\mu$ é ponto de mínimo de f.

Questão 5. Deseja-se construir uma esfera e um cubo de modo que a soma das áreas de suas superfícies seja igual a 2.

(a) Encontre o raio da esfera e o lado do cubo que minimizam a soma de seus volumes.

(b) Encontre o raio da esfera e o lado do cubo que maximizam a soma de seus volumes.

Solução. Sejam $r \geqslant 0$ o raio da esfera e $l \geqslant 0$ o lado do cubo. A soma das áreas de suas superfícies é dada por:

$$A = 6l^2 + 4\pi r^2 = 2$$

Soma dos volumes:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 + l^3.$$

Fazendo $6l^2 = 2 - 4\pi r^2$, temos $l = \sqrt{\frac{2-4\pi r^2}{6}}$. Assim, o problema se reduz a encontrar (caso existam) os pontos de máximo e mínimo da função $V : [0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 + \Big(\frac{1 - 2\pi r^2}{3}\Big)^{3/2}.$$

Como V é contínua e está definida no intervalo fechado e limitado $[0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}]$, pelo teorema de Weierstrass conclui-se que existem pontos de máximo e de mínimo de V no referido intervalo. Além disso, como V é derivável, segue do teorema de Fermat que, se um destes pontos não for extremidade do intervalo, deverá ser um ponto crítico de V no interior do mesmo. Conclusão: V tem pontos de máximo e mínimo no intervalo $[0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}]$, e tais pontos pertencem ao conjunto formado pelas extremidades do intervalo e pelos pontos críticos de V no interior do mesmo.

A função derivada deste volume, $V' :]0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\to \mathbb{R}$, é dada por

$$V'(r) = 4\pi r^2 - 2\pi r\sqrt{\frac{1 - 2\pi r^2}{3}} = 2\pi r\Big(2r - \sqrt{\frac{1 - 2\pi r^2}{3}}\Big)$$

Para encontrar os pontos críticos de V, observe que $2\pi r\Big(2r - \sqrt{\frac{1-2\pi r^2}{3}}\Big) = 0$ se, e somente se, $r = 0$ ou $r = \frac{1}{\sqrt{2\pi+12}}$. Assim, os pontos críticos de V são 0 e $r_0 \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi+12}} \in]0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[$.

Além disso, como 0 e r_0 são os únicos zeros de V', e como V' é contínua, segue do teorema do valor intermediário que V' deve ter sinal constante nos intervalos $]0, r_0[$ e $]r_0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[$. Mas $V'(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}) = 2 > 0$, e $\lim\limits_{r\to 0}\Big(2r - \sqrt{\frac{1-2\pi r^2}{3}}\Big) = -\frac{1}{\sqrt{3}} < 0$, donde $2\pi r\Big(2r - \sqrt{\frac{1-2\pi r^2}{3}}\Big)$ tem sinal negativo para $r > 0$ e próximo de zero. Isto nos permite concluir que V' tem sinal negativo em $]0, r_0[$ e positivo em $]r_0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[$. Logo, pelo teste da derivada primeira, $r_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi+12}}$ é o ponto de mínimo de V.

Por outro lado, temos: $V(0) = \sqrt{\frac{1}{27}}$ e $V(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}) = \sqrt{\frac{1}{9\frac{\pi}{2}}}$. Como $\pi < 4$, tem-se $\frac{\pi}{2} < 2$, logo $9\frac{\pi}{2} < 27$, donde $\frac{1}{9\frac{\pi}{2}} > \frac{1}{27}$, o que implica $V(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}) > V(0)$. Assim, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ é o ponto de máximo de V.