MAT–2453 — Cálculo Diferencial e Integral I — EP–USP

Prova Substitutiva — Soluções – Tipo B

TESTES	SOLUÇÕES
1. Sobre as retas que contém o ponto $(-2/3, 7/3)$ e que são tangentes ao gráfico de $f(x) = x^3 - 2x + 1$, podemos afirmar que: **a.** São duas retas e os pontos de tangência são: $(0,1)$ e $(-1,2)$. **b.** São duas retas e os pontos de tangência são: $(0,1)$ e $(1,0)$. **c.** Só tem uma reta e seu seu coeficiente angular é $-2/3$. **d.** São três retas e os pontos de tangência são: $(-1,2)$, $(1,0)$ e $(0,1)$. **e.** Só tem uma reta e sua equação é $2x + y - 1 = 0$.	**1.** A equação da reta tangente ao gráfico de f num ponto $(x_0, f(x_0))$ é: $y - (x_0^3 - 2x_0 + 1) = (3x_0^2 - 2)(x - x_0)$. Substituindo $x = -{}^2/_3$ e $y = {}^7/_3$ nessa equação, obtemos: $2x_0^2 + 2x_0 = 0$. Portanto, $x_0 = 0$ ou $x_0 = -1$. Como $f(0) = 1$ e $f(-1) = 2$, concluímos que existem duas retas tangentes e seus pontos de tangência são: $(0,1)$ e $(-1,2)$. Alternativa correta: **a.**
2. Considere a função abaixo e assinale a afirmação correta. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left({}^1/_{x^2}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$ **a.** f não é contínua em $x = 0$ mas é derivável em $x = 0$. **b.** f não é contínua e também não é derivável em $x = 0$. **c.** f é contínua em $x = 0$ mas não é derivável em $x = 0$. **d.** f é contínua e é derivável em $x = 0$. **e.** Nenhuma das outras afirmações está correta.	**2.** $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\left({}^1/_{x^2}\right) = 0$, já que $\sin\left({}^1/_{x^2}\right)$ é limitada e x^2 tende a 0. Como $f(0) = 0$, temos que f é contínua em $x = 0$. $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(1/x^2)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x \sin\left({}^1/_{x^2}\right) = 0$, já que $\sin\left({}^1/_{x^2}\right)$ é limitada e x tende a 0. Logo, f é derivável em $x = 0$ e $f'(0) = 0$. Alternativa correta: **d.**
3. Assinale a **<u>alternativa incorreta</u>** sobre a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada a seguir: $F(x) = \int_0^{4x^3 - 9x^2} e^{-t^2}\, dt.$ **a.** $F(x) \leq 0$ para $x \in [0,1]$. **b.** $x = 1$ é ponto de mínimo local de F. **c.** F é crescente no intervalo $]-\infty, 0[$. **d.** F é decrescente no intervalo $]0, 3/2[$. **e.** $F(3) \leq 27$.	**3.** Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, a derivada de F é $F'(x) = (12x^2 - 18x)e^{-(4x^3 - 9x^2)^2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Estudando o sinal de F' obtemos que F é crescente em $\left]-\infty, 0\right]$ e em $\left[{}^3/_2, \infty\right[$ e decrescente em $\left[0, {}^3/_2\right]$. Com isso já é possível responder ao teste, já que $x = 1$ não é ponto de mínimo local de F. Aternativa correta: **b.**
4. Considere as 2 equações abaixo: (i) $\cos(x) + \sec(x) = 3$ (ii) $\cos(x) + \sec(x) = 2$. O número de soluções de cada uma das equações no intervalo $\left]-{}^\pi/_2, {}^\pi/_2\right[$ é, respectivamente: **a.** 2 e 2; **b.** 1 e 0; **c.** 0 e 1; **d.** 1 e 2; **e.** 2 e 1.	**4.** Considere $f(x) = \cos(x) + \sec(x)$. Daí, $f'(x) = -\sin(x) + {}^{\sin(x)}/_{\cos^2(x)} = \sin(x)\left(-1 + {}^1/_{\cos^2(x)}\right)$. A parte da direita da expressão é sempre positiva. Logo, no intervalo $\left]-{}^\pi/_2, {}^\pi/_2\right[$, a função f decresce em $\left]-{}^\pi/_2, 0\right]$ e cresce em $\left[0, {}^\pi/_2\right[$. O ponto de mínimo ocorre em $x = 0$ e o valor mínimo é $f(0) = 2$. Observe também que a função vai para $+\infty$ para x tendendo a $\pm{}^\pi/_2$. Esboçando o gráfico de f, fica claro que $f(x) = 3$ tem duas soluções no intervalo e $f(x) = 2$ tem uma única solução. Alternativa correta: **e.**

Gabaritos dos demais tipos de Prova:

Tipo A: c — a — a — d;

Tipo C: d — b — e — e;

Tipo D: d — a — b — c.

QUESTÕES DISSERTATIVAS

Questão 1. Calcule, justificando com cuidado:

a. $\displaystyle\int_0^{1/3} x^3\sqrt{1-9x^2}\,dx$; **b.** $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{x-1}{x-2}\,e^{\frac{1}{x-2}}$; **c.** $\displaystyle\int \left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)\ln(x)\,dx$.

Solução.

a. Organizando a expressão para promover uma mudança de variáveis temos

$$\int_0^1 x^3\sqrt{4-4x^2}\,dx = \int_0^1 (2x)x^2\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Fazendo a substituição $u = 1-x^2$, que tem como consequência: $-2x\,dx = du$, $x^2 = 1-u$, $x = 0 \leftrightarrow u = 1$ e $x = 1 \leftrightarrow u = 0$ segue que

$$\int_0^1 (2x)x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = -\int_1^0 (1-u)\sqrt{u}\,du = \int_0^1 u^{1/2}\,du - \int_0^1 u^{3/2}\,du = \frac{2}{3}u^{3/4}\Big|_0^1 - \frac{2}{5}u^{5/2}\Big|_0^1 = \frac{4}{15}.$$

Observação 1. Também pode ser resolvida com a substituição $x = \sin(t)$ que cai na integral

$$2\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin(t) - \cos^4(t)\sin(t)\,dt = -\frac{2}{3}\cos^3\Big|_0^{\pi/2} + \frac{2}{5}\cos^5\Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{15}.$$

b. Este limite é "o mesmo" que caiu na P_2, na questão do gráfico:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x-1}{x-2}e^{1/(x-2)} = \lim_{x\to 2^-}(x-1)\frac{1/(x-2)}{e^{-1/(x-2)}}.$$

Para resolver $\displaystyle\lim_{x\to 2^-}\frac{1/(x-2)}{e^{-1/(x-2)}}$, podemos usar L'Hôpital para o caso ∞/∞, uma vez que $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} 1/(x-2) = -\infty$ e $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} e^{-1/(x-2)} = +\infty$:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1/(x-2)}{e^{-1/(x-2)}} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-\frac{1}{(x-2)^2}}{\frac{e^{-1/(x-2)}}{(x-2)^2}} = \lim_{x\to 2^-} -e^{1/(x-2)} = 0.$$

Como $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} x-1 = 1$, concluímos que o limite pedido é zero.

c. Usando integração por partes, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int \left(\sqrt{x}+\frac{2}{x}\right)\ln x\,dx &= \left(\frac{2}{3}x^{3/2} + 2\ln(x)\right)\ln x - \int \frac{2}{3}x^{1/2} + 2\frac{\ln(x)}{x}\,dx \\
&= \left(\frac{2}{3}x^{3/2} + 2\ln(x)\right)\ln x - \frac{4}{9}x^{3/2} - \ln^2(x) + c,\ c\in\mathbb{R} \\
&= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln(x) + \ln^2(x) - \frac{4}{9}x^{3/2} + c,\ c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Questão 2 (Valor: $2,0$)**.** Considere a família de parábolas da forma

$$y = ax^2 - (1+a^2)x,$$

com $a > 0$. Determine, se houver, para qual número real $a > 0$ a parábola tem vértice mais à esquerda (abscissa do vértice mínima). E mais à direita (abscissa do vértice máxima)?

Solução. A abscissa do vértice da parábola é $(1+a^2)/2a$. Considero a função $f(a) = (1+a^2)/2a$. Devo decidir se f tem máximo e mínimo no intervalo $\left]-\infty, 0\right[$.

A derivada $f'(a) = \dfrac{a^2-1}{2a^2}$, mostra que f é crescente no intervalo $\left]-\infty, -1\right]$ e decrescente no intervalo $\left[-1, 0\right[$. Para $a = -1$ temos o ponto de máximo no intervalo $\left]-\infty, 0\right[$ e não existe ponto de mínimo, já que

$$\lim_{a \to -\infty} \frac{1+a^2}{2a} = \lim_{a \to -\infty} \frac{a^2}{2a}\left(\frac{1}{a^2}+1\right) = -\infty.$$

Conclusão: nessa família de parábolas, o vértice com abscissa mais à direita se dá para $a = -1$ e o vértice, nesse caso, tem abscissa $f(-1)$ que também é -1. O vértice com abscissa mais à esquerda não existe, já que a abscissa tende a $-\infty$ se a tende para $-\infty$ (e também se a tende para 0^-).