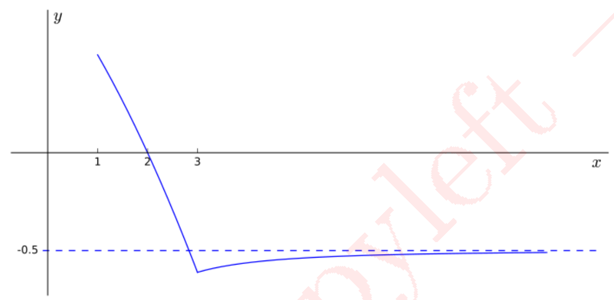
MAT–2453 — Cálculo Diferencial e Integral I — EP–USP

Terceira Prova — Soluções – Tipo A

TESTES	SOLUÇÕES
1. O valor de $F'(x)$, onde $F(x) = \int_0^{x^4} \sin(t^2)\,dt$ é **a.** $4x^3\sin(x^8)$; **b.** $4x^3\cos(x^8)$; **c.** $2x\sin(x^8)$; **d.** $2x\cos(x^8)$; **e.** $x^4\cos(x^8)\sin(x^8)$.	**1.** Do Teorema Fundamental do Cálculo sabemos que se $G(t)$ é uma primitiva de $g(t) = \sin(t^2)$, então $F(x) = G(x^4) - G(0)$ e portanto $F'(x) = \left(G(x^4)\right)' - \left(G(0)\right)' = G'(x^4)(x^4)' - 0 = 4x^3 g(x^4) = 4x^3\sin(x^8)$. Alternativa correta: **a.**
2. O valor de $\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x} + x^{2018}\sin^3 x\,dx$ é **a.** $3/2$; **b.** $1/2$; **c.** $-3/2$; **d.** $-1/2$; **e.** 0.	**2.** Como $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^{2018}\sin^3 x$ é uma função ímpar e o intervalo de integração é simétrico em relação à origem, temos que a integral vale 0. Alternativa correta: **e.**
3. A área da região delimitada pelos gráficos de $f(x) = x^2 - 2x$ e $g(x) = x$ é **a.** 9; **b.** 3; **c.** $4/3$; **d.** $9/2$; **e.** $-7/3$.	**3.** Como $x^2 - 2x = x \iff x = 0$ ou $x = 3$ e para $0 \le x \le 3$ temos $x \le x^2 - 2x$, a área em questão é $\int_0^3 x - (x^2 - 2x)\,dx = \int_0^3 3x - x^2\,dx$, ou seja, $3x^2/2\big\|_0^3 - x^3/3\big\|_0^3 = 9/2$. Alternativa correta: **d.**
4. Seja $f\colon [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua, cujo gráfico está representado abaixo.  Considere as seguintes afirmações sobre a função $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$, com $x \in [1, +\infty[$: (I) F é crescente em $[1, 2]$ e decrescente em $[2, +\infty[$. (II) F é contínua, mas não é derivável. (III) $\lim_{x\to+\infty} F(x) = -\infty$. É correto dizer que **a.** as afirmações (I) e (III) são verdadeiras. **b.** todas as afirmações são verdadeiras. **c.** as afirmações (I) e (II) são verdadeiras. **d.** todas as afirmações são falsas. **e.** as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.	**4.** Observe incialmente que F é contínua no intervalo $\left[1, +\infty\right[$. (I) é verdadeira pois $F'(x) = f(x)$, que é positiva no intervalo $\left]1, 2\right[$ e negativa em $\left]2, +\infty\right[$. (II) é falsa pois, como observado acima, $f(x)$ é contínua em todo ponto. Isso garante a diferenciabilidade de $F(x)$ no interior do domínio. (III) é verdadeira, pois $f(x) < -\frac{1}{2}$ nos diz que $F(x) < \int_0^x -1/2\,dt = -x/2$. Uma vez que $\lim_{x\to\infty} -x/2 = -\infty$ obtemos $\lim_{x\to+\infty} F(x) = -\infty$. Alternativa correta: **a.** **Gabaritos dos demais tipos de Prova:** Tipo B: b — b — c — c; Tipo C: c — a — d — b; Tipo D: d — c — d — e.

Questão 1 (Valor: $4.0 = 1.0 + 1.5 + 1.5$). Calcule as primitivas abaixo.

a. $\displaystyle\int \frac{-x+6}{x(x^2-5x+6)}\,dx$; **b.** $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$; **c.** $\displaystyle\int (e^x)^2 \arctan(e^x)\,dx$.

Solução.

a. Fatorando o denominador temos $x(x^2-5x+6) = x(x-2)(x-3)$, um polinômio com todas as raízes simples. Logo

$$\frac{-x+6}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} = \frac{A(x^2-5x+6)+Bx(x-3)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x-3)},$$

ou seja, $-x+6 = A(x^2-5x+6)+Bx(x-3)+Cx(x-2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Fazendo:

- $x = 0$: $6 = 6A \implies A = 1$.
- $x = 2$: $4 = -2B \implies B = -2$.
- $x = 3$: $3 = 3C \implies C = 1$.

Deste modo

$$\int \frac{-x+6}{x(x^2-5x+6)}\,dx = \int \frac{1}{x} + \frac{-2}{x-2} + \frac{1}{x-3}\,dx = \ln|x| - 2\ln|x-2| + \ln|x-3| + k.$$

b. Uma maneira de calular esta primitiva é:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2xx^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$$

Fazendo $u = x^2+1$ temos $du = 2x\,dx$ (e também $x^2 = u-1$):

$$\frac{1}{2}\int \frac{2xx^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{u-1}{\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{2}\int u^{1/2} - u^{-1/2}\,du = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2}\right) + k = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} - \sqrt{x^2+1} + k.$$

Outra maneira de se calcular a integral é fazer diretamente $x = \tan u$, donde $dx = \sec^2 u\,du$, obtendo

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx &= \int \frac{\tan^3(u)\sec^2(u)}{\sqrt{1+\tan^2(u)}}\,du = \int \tan^3(u)\sec(u)\,du \\ &= \int \tan^2(u)\tan(u)\sec(u)\,du = \int (\sec^2(u)-1)\tan(u)\sec(u)\,du.\end{aligned}$$

Fazendo $z = \sec(u)$, $dz = \tan^2(u)\tan(u)\sec(u)\,du$ temos

$$\begin{aligned}\int (\sec^2(u)-1)\tan(u)\sec(u)\,du &= \int (z^2-1)dz = {}^{z^3}\!/_3 - z + k \\ &= \frac{\sec^3\big(\arctan(x)\big)}{3} - \sec\big(\arctan(x)\big) + k \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} - \sqrt{x^2+1} + k.\end{aligned}$$

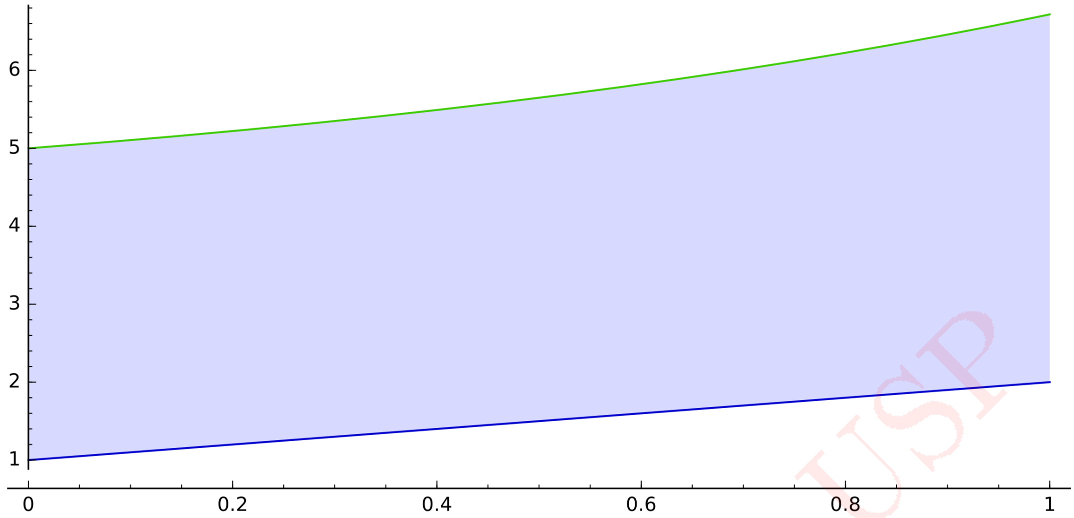
c. Fazendo $u = e^x$, $du = e^x\,dx = u\,dx$, temos

$$\begin{aligned}\int (e^x)^2\arctan(e^x)\,dx &= \int u^2\arctan(u)\frac{1}{u}\,du \\ &= \int \underbrace{u}_{f'(u)}\underbrace{\arctan(u)}_{g(u)}\,du \\ &= \frac{u^2\arctan(u)}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{u^2}{1+u^2}\,du \\ &= \frac{u^2\arctan(u)}{2} - \frac{1}{2}\int 1 - \frac{1}{1+u^2}\,du \\ &= \frac{u^2\arctan(u)}{2} - \frac{1}{2}(u - \arctan(u)) + k \\ &= \frac{1}{2}\Big(e^{2x}\arctan(e^x) - e^x + \arctan(e^x)\Big) + k\end{aligned}$$

Questão 2 (Valor: $2,0$)**.** Determine o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo Ox do conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x+1 \le y \le e^x + 4 \quad \text{e} \quad 0 \le x \le 1\}.$$

Solução. A região A é



O volume do sólido obtido pela rotação de A em torno do eixo Ox é

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi(e^x+4)^2\,dx - \int_0^1 \pi(x+1)^2\,dx \\ &= \pi \int_0^1 e^{2x} + 8e^x - x^2 - 2x + 15\,dx \\ &= \pi\left(\frac{e^{2x}}{2} + 8e^x - \frac{x^3}{3} - x^2 + 15x\right)\Big|_0^1 \\ &= \pi\left(\frac{e^2}{2} + 8e + \frac{31}{6}\right). \end{aligned}$$