## MAT–2453 — Cálculo Diferencial e Integral I — EP–USP

### Segunda Prova — Soluções

| TESTES | SOLUÇÕES |
|---|---|
| **1.** Sejam $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^3 - 3x$ e $c \in \mathbb{R}$ cuja existência é garantida pelo Teorema do Valor Médio para $g$ no intervalo $[-4, 2]$. O valor $c$ é<br>**a.** $-1$; **b.** $0$; **c.** $2$; **d.** $1$; **e.** $-2$. | **1.** Do TVM, temos que existe $c \in ]-4, 2[$ tal que $g(2) - g(-4) = g'(c)(2 - (-4))$, o que equivale a $54 = (3c^2 - 3)6$, donde $c^2 = 4$, $-4 < c < 2$. Então $c = -2$.<br>Alternativa correta: **e**. |
| **2.** Seja $f : ]0, \infty[ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^{(x^2)}$. Então:<br>**a.** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ e $f$ é estritamente crescente.<br>**b.** nenhuma das outras alternativas é correta.<br>**c.** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ e $f$ tem um ponto de mínimo local.<br>**d.** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ e $f$ tem um ponto de mínimo local.<br>**e.** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ e $f$ é estritamente crescente. | **2.** Podemos escrever $f(x) = x^{(x^2)} = \exp(x^2 \ln x)$, $x > 0$. Com isso, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \exp\left(\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x\right) = e^0 = 1$, já que pela Regra de L'Hospital temos $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-2/x^3} = 0$.<br>Além disso, $f'(x) = f(x)\big[2x \ln x + x\big]$ e então $f'(x) < 0$, se $x < e^{-1/2}$, e $f(x) > 0$, se $x > e^{-1/2}$. Logo $x_0 = e^{-1/2}$ é um ponto de mínimo local.<br>Alternativa correta: **d**. |
| **3.** Seja $g$ um função contínua no intervalo $[-1, 2]$ e derivável em $]-1, 2[$, que assume os valores $g(-1) = 0$, $g(0) = 4$, $g(1) = 2$ e $g(2) = 2$. Considere as afirmações:<br>(I) A equação $g(x) = 3$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[-1, 0]$.<br>(II) A equação $g(x) = 2$ tem exatamente uma solução no intervalo $[-1, 0]$.<br>(III) A função $g$ admite um ponto crítico no intervalo $]1, 2[$.<br>Pode-se dizer com certeza que<br>**a.** todas as afirmações são falsas.<br>**b.** somente as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.<br>**c.** somente as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.<br>**d.** todas as afirmações são verdadeiras.<br>**e.** somente a afirmação (I) é verdadeira. | **3.**<br>(I) Verdadeira: como $g$ é contínua e $g(-1) = 0 < 3 < 4 = g(0)$, o TVI garante que existe $c \in [-1, 0]$ tal que $g(c) = 3$.<br>(II) Falsa: também pelo TVI, verificamos a existência de uma solução para $g(x) = 2$, porém a unicidade não pode ser garantida.<br>(III) Verdadeira: como $g(1) = g(2) = 2$, podemos aplicar o teorema de Rolle para $g$ no intervalo $[1, 2]$, ou seja, existe $c \in ]1, 2[$ tal que $g'(c) = 0$.<br>Alternativa correta: **b**. |
| **4.** Deseja-se estimar o valor de $\dfrac{1}{e}$ com erro inferior a $2 \times 10^{-4}$. Use um polinômio de Taylor da função $f(x) = e^{-x}$, em torno de $x_0 = 0$, e seu resto de Lagrange. Sabendo que $2 \le e \le 3$, assinale a alternativa correspondente ao menor grau de um tal polinômio que se pode garantir com estes elementos.<br>**a.** 8; **b.** 5; **c.** 9; **d.** 6; **e.** 7. | **4.** O resto de Lagrange nesta aproximação é dado por $E_n(1) = \dfrac{e^{-c}}{(n+1)!}$, onde $c \in ]0, 1[$. Segue que $\dfrac{1}{3(n+1)!} \le E_n(1) \le \dfrac{1}{(n+1)!}$. Para o que o resto seja menor que $2 \times 10^{-4}$, a estimativa superior nos dá $n \ge 6$. Usando $n = 5$ na estimativa inferior, vemos que $E_5(1) \ge \dfrac{1}{2160} > 2 \times 10^{-4}$, sendo de fato 6 o menor grau para o polinômio procurado.<br>Alternativa correta: **d**. |
| **5.** Seja $f(x) = e^{-x} + x$, definida em toda a reta real. O número de soluções da equação $f(x) = 2$ no intervalo $[-2, 2]$ é<br>**a.** 3; **b.** 1; **c.** 2; **d.** 4; **e.** 0. | **5.** Aqui temos $f'(x) = -e^{-x} + 1$ e $f''(x) = e^{-1} > 0$, donde $f'$ é sempre crescente. Como $f'(0) = 0$, então $f'(x) < 0$, se $x < 0$ e $f'(x) > 0$, se $x > 0$. Logo $x_0 = 0$ é um ponto de mínimo (global - por que?) de $f$. Além disso $f(-2) = e^2 - 2 > 2$, $f(0) = 0$ e $f(2) = e^{-2} + 2 > 2$. Aplicando o TVI e considerando o crescimento de $f$ nos intervalos $[-2, 0]$ e $[0, 2]$, concluímos existe um único ponto em cada um deles no qual $f$ vale 2.<br>Alternativa correta: **c**. |

## QUESTÕES DISSERTATIVAS

**Questão 1** (Valor: 3,0). Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} e^{1/(1-x)}.$$

Esboce o gráfico de $f$ localizando intervalos de crescimento e decrescimento, concavidades, limites convenientes e assíntotas (quando existirem). Use que

$$f'(x) = \frac{3-x}{(x-1)^3} e^{1/(1-x)} \qquad \text{e} \qquad f''(x) = \frac{2x^2 - 11x + 11}{(x-1)^5} e^{1/(1-x)}.$$

*Solução.*

- O domínio de $f$ é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- O crescimento de $f$ é dado pelo sinal de $f'$. Neste caso temos

$$f'(x) < 0 \iff x < 1 \text{ ou } x > 3 \quad \text{e} \quad f'(x) > 0 \iff 1 < x < 3,$$

  donde $f(x)$ é decrescente em $]-\infty, 1[ \cup [3, +\infty[$ e crescente em $]1, 3]$, sendo então $x_0 = 3$ um ponto de máximo local (por enquanto), onde $f(3) = 2e^{-1/2} > 1$.

- A concavidade é obtida pelo sinal de $f''$, que nesse caso resume-se ao estudo do sinal de $\dfrac{2x^2 - 11x + 11}{x-1}$. Então

$$f''(x) > 0 \iff x \in \left]1, \frac{11-\sqrt{33}}{4}\right[ \cup \left]\frac{11+\sqrt{33}}{4}, +\infty\right[, \text{ onde } f \text{ tem concavidade para cima;}$$

$$f''(x) < 0 \iff x \in \left]-\infty, 1\right[ \cup \left]\frac{11-\sqrt{33}}{4}, \frac{11+\sqrt{33}}{4}\right[, \text{ onde } f \text{ tem concavidade para baixo.}$$

  Portanto os pontos de inflexão são $a = \frac{11-\sqrt{33}}{4}$ e $b = \frac{11+\sqrt{33}}{4}$.

- Em vista do domínio de $f$, são convenientes os seguintes limites:
  (i) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$, pois $\frac{x+1}{x-1}$ tende a 1 e, como $1/(1-x)$ tende a 0, $e^{1/(1-x)}$ tende a 1.

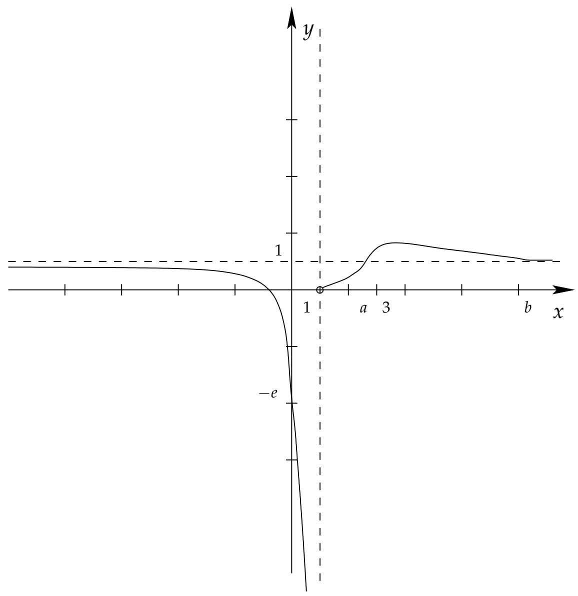
  (ii) Analogamente temos $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$. Destes dois limites e do crescimento de $f$, analisado acima, concluimos que $x_0 = 3$ é um ponto de máximo global de $f$.

  (iii) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, pois $\frac{x+1}{x-1}$ tende a $-\infty$ e, como $1/(1-x)$ tende a $\infty$, $e^{1/(1-x)}$ tende a $+\infty$.

  (iv) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$. De fato, temos uma indeterminação do tipo "$\infty \cdot 0$" e podemos escrever

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x+1)\frac{(x-1)^{-1}}{e^{1/x-1}} = \lim_{u\to+\infty} \left(2 + \frac{1}{u}\right) \frac{u}{e^u} = 0,$$

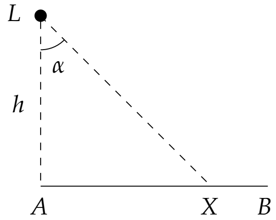
  onde fizemos $u = (x-1)^{-1}$ e a última igualdade segue de $\lim\limits_{u\to+\infty} 2 + 1/u = 2$ e da regra de L'Hospital.



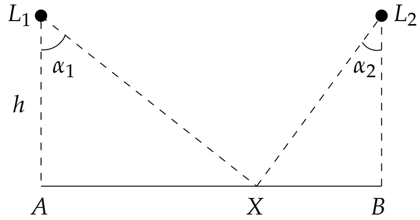
**Questão 2** (Valor: $2,0$)**.** Sejam $L$ uma fonte luminosa puntiforme de potência $P$ e $\overline{AB}$ um segmento de reta que dista $h > 0$ de $L$ (vide Figura 1A). A intensidade luminosa em $X \in \overline{AB}$, que dista $d$ de $L$, é dado por

$$I(X) = \frac{kP\cos\alpha}{d^2}, \text{ onde } k > 0 \text{ é uma constante.}$$

Considere agora, conforme a Figura 1B, duas fontes $L_1$ e $L_2$ (com potências $P_1$ e $P_2$, respectivamente), emitindo luz sobre os pontos de um segmento $\overline{AB}$ de comprimento $h/2$. Mostre que existe um único ponto em $\overline{AB}$ sobre o qual a intensidade luminosa é máxima.




(1A) Uma fonte




(1B) Duas fontes

*Solução.* Denotemos por $I(X)$ a intensidade luminosa total sobre o ponto $X \in \overline{AB}$. Então

$$I(X) = \frac{kP_1 h\cos\alpha_1}{d_1^2} + \frac{kP_2 h\cos\alpha_2}{d_2^2},$$

onde $\alpha_1$ e $\alpha_2$ são os ângulos indicados na Figura 1B, $d_1$ a distância entre $X$ e $L_1$ e $d_2$ a distância entre $X$ e $L_2$.

Se $x$ é a distância entre $A$ e $X$, temos que $X$ dista $h/2 - x$ de $B$. Além disso,

$$d_1(X) = \sqrt{h^2 + x^2}, \quad \cos\alpha_1 = \frac{h}{d_1(X)}, \quad d_2(X) = \sqrt{h^2 + (h/2 - x)^2}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{h}{d_2(X)}.$$

Deste modo escrevemos a intensidade em termos de $x \in [0, h/2]$:

$$I(x) = \frac{kP_1 h}{(h^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{kP_2 h}{\big(h^2 + (h/2 - x)^2\big)^{3/2}},$$

que é uma função contínua em $[0, h/2]$ e derivável em $]0, h/2[$. Para simplificar a notação escrevemos $A = kP_1 h$ e $B = kP_2 h$, que são constantes. O teorema de Weierstrass garante então a existência de máximo e mínimo para $I(x)$, $x \in [0, h/2]$. O teorema de Fermat indica que os pontos de $]0, h/2[$ onde tal máximo é atingido devem anular $I'(x)$, que é dada por

$$\begin{aligned}
I'(x) &= \frac{-3A}{(h^2 + x^2)^{5/2}} + \frac{3B(h/2 - x)}{\big(h^2 + (h/2 - x)^2\big)^{5/2}} \\
&= \frac{3\Big(-Ax\big(h^2 + (h/2 - x)^2\big)^{5/2} + B(h/2 - x)(h^2 + x^2)^{5/2}\Big)}{(h^2 + x^2)^{5/2}\big(h^2 + (h/2 - x)^2\big)^{5/2}}
\end{aligned}$$

Sendo $g(x) = -Ax\big(h^2 + (h/2 - x)^2\big)^{5/2} + B(h/2 - x)(h^2 + x^2)^{5/2}$, contínua e derivável, temos

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -A\big(h^2 + (h/2 - x)^2\big)^{5/2} + \frac{5}{2}Ax\big(h^2 + (h/2 - x)^2\big)^{3/2}2x \\
&\quad - B(h^2 + x^2)^{5/2} + B\frac{5}{2}(h/2 - x)(h^2 + x^2)^{3/2}2(h/2 - x) \\
&= A\big(h^2 + (h/2 - x)^2\big)^{5/2}\big[-6x^2 + (7h/2)x - 3h^2/4\big] \\
&\quad B(h^2 + x^2)^{3/2}\big[-6x^2 + (5h/2)x - h^2\big].
\end{aligned}$$

Na expressão acima os termos entre colchetes são ambos negativos e portanto $g'(x) < 0$ para todo $x \in ]0, h/2[$, logo $g$ é decrescente em $[0, h/2]$.

Como $g(0) = Bh^6/2 > 0 > g(h/2) = -Ah^6/2$, o teorema do valor intermediário garante a existência de $c \in ]0, h/2[$ tal que $g(c) = 0$. A unicidade de tal $c$ vem do fato de $g$ ser decrescente no intervalo em questão.

Finalmente o sinal de $I'(x)$ é o mesmo de $g'(x)$ e portanto $I'(x) > 0$ se $x \in ]0, c[$ e $I'(x) < 0$, se $x \in ]c, h/2[$, donde $c$ é o único ponto de máximo para a função $I$ no intervalo $[0, h/2]$.

**Observação 1.** Poderia concluir concluir que o ponto crítico $c$ é de máximo, calculando-se $I''(x)$, que é negativa no intervalo $]0, h/2[$.