QUESTÃO DISSERTATIVA

Questão 1 (Valor: 3,0 pontos). **Seja $f(x) = \sin\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)\sin\left(\sqrt[3]{x}\right)$ Determine os pontos em que f não é derivável. Nos demais pontos, calcule $f'(x)$.**

A função $g(y) = \sqrt[3]{y}$ é derivável para todo $y \neq 0$.

Logo $\sqrt[3]{x^3+x^2}$ é derivável em todo $x \neq 0$ e $x \neq -1$ e $\sqrt[3]{x}$ é derivável em todo $x \neq 0$. Portanto se $x \neq 0$ e $x \neq -1$ temos que f é derivável

e $$f'(x) = \sin\left(\sqrt[3]{x}\right) \cdot \cos\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right) \cdot \frac{3x^2+2x}{3\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}} + \sin\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right) \cdot \cos\left(\sqrt[3]{x}\right) \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Para $x=0$ consideramos o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right) \cdot \sin\left(\sqrt[3]{x}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)}{\sqrt[3]{x^3+x^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^3+x^2}{x^2}} \cdot \frac{\sin\left(\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}} = 1.1.1 = 1.$$

Logo f é derivável em $x_0 = 0$ e $f'(0) = 1$.

Para $x = -1$ consideramos o limite

$$\lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{\sin\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)\sin\left(\sqrt[3]{x}\right)}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\sin\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)}{\sqrt[3]{x^3+x^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^3+x^2}}{x+1} \cdot \sin\left(\sqrt[3]{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to -1} \underbrace{\frac{\sin\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)}{\sqrt[3]{x^3+x^2}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\sin\left(\sqrt[3]{x}\right)}_{\to \sin(-1) < 0} = -\infty$$

Logo, f não é derivável em $x_0 = -1$.

Nota: