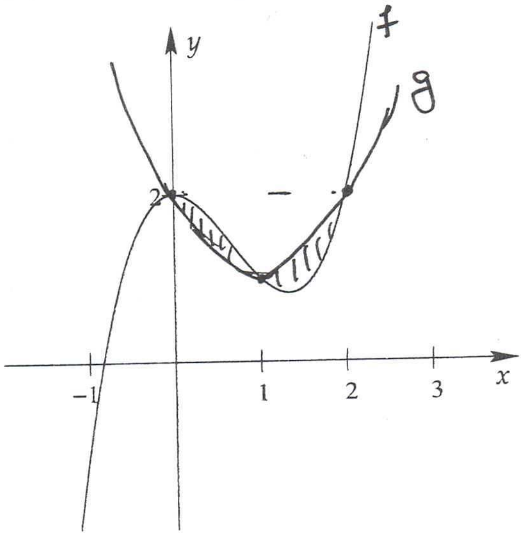
Questão 1 (Valor: 2.0 pontos). Dado o gráfico de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ abaixo, determine a área compreendida entre os gráficos de f e $g(x) = x^2 - 2x + 2$, para $0 \leq x \leq 2$.



$f(x) - g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = 1$ ou $x = 2$

O sinal de $f-g$ é dado por

		0		1		2	
$f-g$	$-$		$+$		$-$		$+$

A área hachurada é $\int_0^1 [f(x) - g(x)]\,dx + \int_1^2 [g(x) - f(x)]\,dx$

$= \int_0^1 [x^3 - 3x^2 + 2x]\,dx + \int_1^2 [-x^3 + 3x^2 - 2x]\,dx =$

$= \left.\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1 + \left.\left(-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2\right)\right]_1^2 =$

$= \frac{1}{4} - 1 + 1 + (-4 + 8 - 4) - \left(-\frac{1}{4} + 1 - 1\right)$

$= \boxed{\frac{1}{2}}$

Questão 2 (Valor: 1.5 pontos). Mostre que $\frac{\arctan(x)}{x} \leq 1$, para todo $x > 0$.

A função $f(x) = \arctan(x)$ é derivável (e portanto contínua) em $\mathbb{R}$.
Para cada $x > 0$ posso aplicar o T.V.M. para a função f no intervalo $[0, x]$ e obtenho:
$\exists \bar{x} \in]0, x[$ tal que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\bar{x})$$

Como $f'(\bar{x}) = \frac{1}{1+(\bar{x})^2} < 1, \forall \bar{x}$, e $f(0)=0$

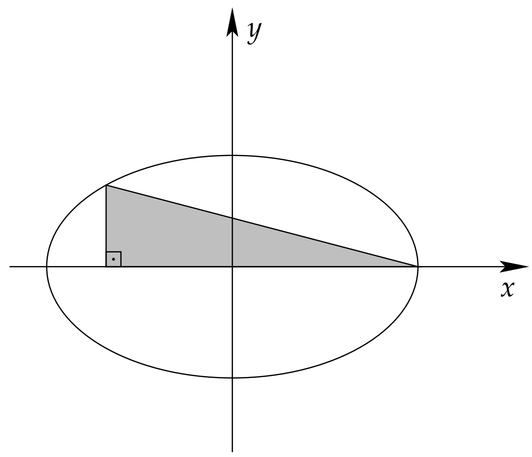
sei que $\frac{f(x)}{x} < 1$, ou seja,

$$\frac{\arctan(x)}{x} < 1, \forall x > 0.$$

~~OBS~~

MAT-2453 — 2014 — Gabarito 2ª Prova

Questão 3 (Valor: 2.5 pontos)**.** Considere a elipse de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ e todos os triângulos retângulos construídos com um dos vértices em $(5,0)$, um sobre a elipse e o terceito sobre o eixo Ox, como na figura abaixo. Justifique a existência, dentre esses triângulos, de um com área máxima e determine as medidas de sua base e sua altura.



Solução. Denotando por $(x,0)$ as coordenadas do vértice móvel sobre o eixo Ox, temos que a base do triângulo mede $b = 5 - x$, com $-5 \le x \le 5$.

A altura h do triângulo é, para cada x descrita acima, o número $y \ge 0$ tal que $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, ou seja, $h = \frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}$.

Deste modo a área do triângulo, em termos de x, é dada por

$$A(x) = \frac{bh}{2} = \frac{3}{10}(5-x)\sqrt{25-x^2}, \text{ com } -5 \le x \le 5.$$

A função $A(x)$ atinge valor máximo e mínimo, pois é contínua e está definida num intervalo fechado. Os candidatos a ponto de máximo ou mínimo são os extremos do intervalo $[-5,5]$ e os pontos críticos em seu interior, os quais são as soluções de $A'(x) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 = A'(x) &= \frac{3}{10}\left[-\sqrt{25-x^2} - \frac{x(5-x)}{\sqrt{25-x^2}}\right] \\ &= \frac{3}{10}\left[\frac{2x^2 - 5x - 25}{\sqrt{25-x^2}}\right]. \end{aligned}$$

Logo, $A'(x) = 0$, com $x \in]-5,5[$ se e somente se $x = -\frac{5}{2}$. Para verificar que este ponto crítico é um ponto de máximo local podemos utilizar o teste da segunda derivada (muito trabalho!) ou analisar o sinal de $A'(x)$ numa vizinhança de $x = -\frac{5}{2}$ o que, neste caso, é bem mais simples:

- se $-5 < x < -\frac{5}{2}$ temos $A'(x) > 0$, e
- se $-\frac{5}{2} < x < 5$ temos $A'(x) < 0$.

Portanto $x = -\frac{5}{2}$ é máximo local, com $A\left(\frac{-5}{2}\right) = 45\frac{\sqrt{3}}{8}$. Como $A(-5) = A(5) = 0$, temos que $x = -\frac{5}{2}$ é máximo global.

Nesse caso as dimensões do triângulo são

$$b = \frac{15}{2} \quad \text{e} \quad h = 3\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(4,0) **Questão 4.** Esboce, no espaço abaixo, o gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}e^{-\frac{1}{x}}$, determinando:

i) o domínio de f e limites pertinentes;

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = [-\infty \cdot 1] = -\infty$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = [+\infty \cdot 1] = +\infty$

c) $\displaystyle\lim_{x\to0^-} \frac{x^2}{x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{x-1}{x^2}} \underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to0^-} \frac{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{-x+2}{x^3}} = \lim_{x\to0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{-x+2}{x}} \underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to0^-} \frac{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{-2}{x^2}} = \lim_{x\to0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{-2} = -\infty$

d) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{x^2}{x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = [0 \cdot 0] = 0$

e) $\displaystyle\lim_{x\to1^-} \frac{x^2}{x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \left[-\infty \cdot \frac{1}{e}\right] = -\infty$

f) $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \frac{x^2}{x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \left[+\infty \cdot \frac{1}{e}\right] = +\infty$

ii) os intervalos de crescimento e decrescimento de f;

$f'(x) = \left(\dfrac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} + \dfrac{x^2}{x^2(x-1)}\right)e^{-\frac{1}{x}} = \dfrac{x^2 - x - 1}{(x-1)^2}e^{-\frac{1}{x}}.$

$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	f
$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	$x^2 - x - 1$
$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	f'
	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		1		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		

$x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ é um ponto de máximo local e $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é um ponto de mínimo local de f.

Temos que $f(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) < -1$ e $f(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) > 2$.

iii) concavidades e pontos de inflexão, sabendo-se que $f''(x) = \dfrac{x^2+1}{(x-1)^3x^2}e^{-\frac{1}{x}}$;

$\cap$		$\cap$		$\cup$	f
$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	$x - 1$
$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	f'
	0		1		

f não admite ponto de inflexão.

iv) assíntotas, se existirem.

a) Temos que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^2}{x^2-x} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = [1 \cdot 1] = 1 = m.$

e $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 1x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2}{x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 e^{-\frac{1}{x}} - x^2 + x}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}} - 1 + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}$

$\underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{-1 + \frac{2}{x}} = 0 = n.$

Portanto, $y = 1x + 0$ é uma assíntota oblíqua (para $x \to +\infty$).

b) Analogamente, temos que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^2}{x^2-x} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = 1 = m.$

e $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - 1x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2}{x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} - x\right) = 0 = n.$

Portanto, $y = 1x + 0$ é uma assíntota oblíqua (para $x \to -\infty$).

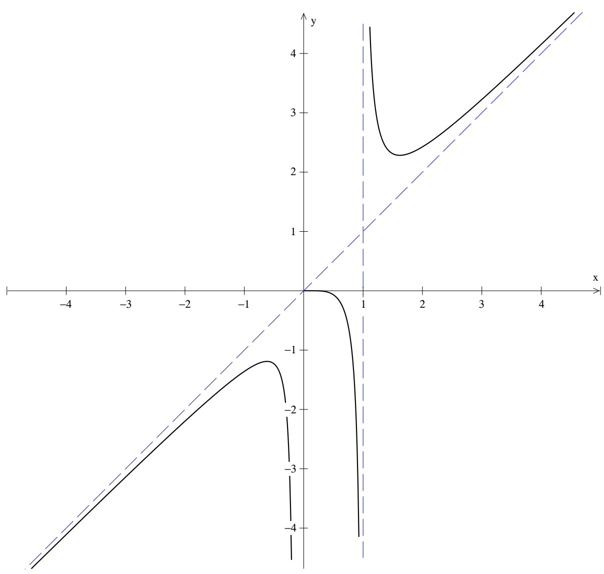
c) Como $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x^2}{x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = -\infty$, então $x = 0$ é uma assíntota vertical.

d) Como $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x^2}{x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = -\infty$, então $x = 1$ é uma assíntota vertical.

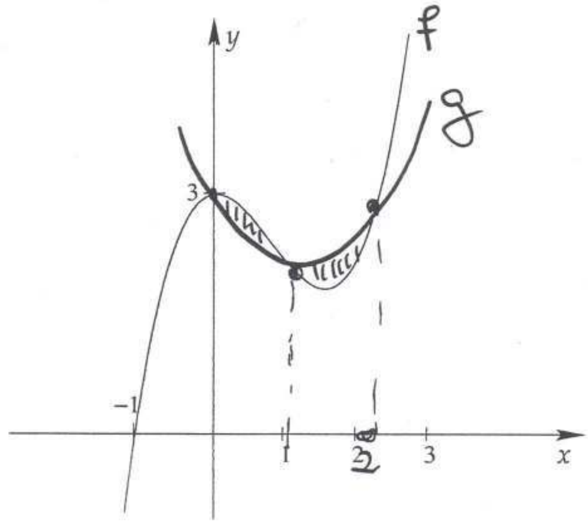
e) Como $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x^2}{x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$, então $x = 1$ é uma assíntota vertical.

f) Como existem assíntotas oblíquas, não existem assíntotas horizontais.

v) Portanto, o gráfico de f é:



Questão 1 (Valor: 2.0 pontos). Dado o gráfico de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ abaixo, determine a área compreendida entre os gráficos de f e $g(x) = x^2 - 2x + 3$, para $0 \leq x \leq 2$.



$$f(x) - g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2)$$

O sinal de $f-g$ é dado por

		0		1		2	
$f-g$	$-$		$+$		$-$		$+$

Logo, a área pedida é

$$\int_0^1 [f(x) - g(x)]\,dx + \int_1^2 [g(x) - f(x)]\,dx =$$

$$= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx + \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x)\,dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \Big]_0^1 + \left(-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2\right)\Big]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{4} - 1 + 1 + (-4 + 8 - 4) - (-1/4 + 1 - 1)$$

$$= \frac{1}{2}$$

Questão 2 (Valor: 1.5 pontos). Mostre que $\frac{\arctan(x)}{x} \leq 1$, para todo $x > 0$.

A função $f(x) = \arctan(x)$ é derivável (e portanto contínua) em $\mathbb{R}$.

Para cada $x > 0$ posso aplicar o T.V.M. para a função f no intervalo $[0, x]$ e obtenho:

$\exists \bar{x} \in]0, x[$ tal que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\bar{x})$$

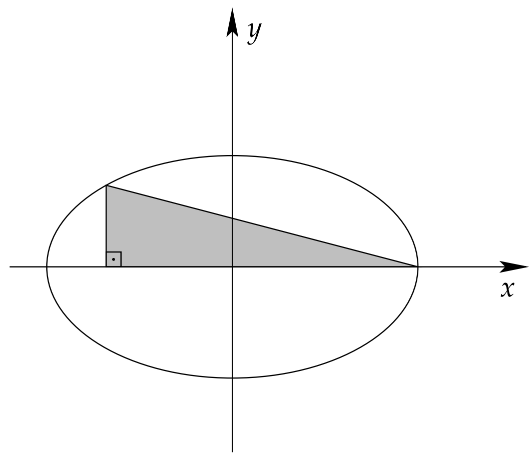
Como $f'(\bar{x}) = \frac{1}{1+(\bar{x})^2} < 1, \forall \bar{x}$, e $f(0)=0$

sei que $\frac{f(x)}{x} < 1$, ou seja,

$$\frac{\arctan(x)}{x} < 1, \forall x > 0.$$

MAT-2453 — 2014 — Gabarito 2ª Prova

Questão 3 (Valor: 2.5 pontos)**.** Considere a elipse de equação $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ e todos os triângulos retângulos construídos com um dos vértices em $(4,0)$, um sobre a elipse e o terceito sobre o eixo Ox, como na figura abaixo. Justifique a existência, dentre esses triângulos, de um com área máxima e determine as medidas de sua base e sua altura.



Solução. Denotando por $(x,0)$ as coordenadas do vértice móvel sobre o eixo Ox, temos que a base do triângulo mede $b=4-x$, com $-4\le x\le 4$.

A altura h do triângulo é, para cada x descrito acima, o número $y\ge 0$ tal que $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$, ou seja, $h=\dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.

Deste modo a área do triângulo, em termos de x, é dada por

$$A(x)=\frac{bh}{2}=\frac{3}{8}(4-x)\sqrt{16-x^2},\ \text{com}\ -4\le x\le 4.$$

A função $A(x)$ atinge valor máximo e mínimo, pois é contínua e está definida num intervalo fechado. Os candidatos a ponto de máximo ou mínimo são os extremos do intervalo $[-4,4]$ e os pontos críticos em seu interior, os quais são as soluções de $A'(x)=0$. Assim,

$$\begin{aligned}0=A'(x)&=\frac{3}{8}\left[-\sqrt{16-x^2}-\frac{x(4-x)}{\sqrt{16-x^2}}\right]\\&=\frac{3}{8}\left[\frac{2x^2-4x-16}{\sqrt{16-x^2}}\right].\end{aligned}$$

Logo, $A'(x)=0$, com $x\in]-4,4[$ se e somente se $x=-2$. Para verificar que este ponto crítico é um ponto de máximo local podemos utilizar o teste da segunda derivada (muito trabalho!) ou analisar o sinal de $A'(x)$ numa vizinhança de $x=-2$ o que, neste caso, é bem mais simples:

- se $-4<x<-2$ temos $A'(x)>0$, e
- se $-2<x<4$ temos $A'(x)<0$.

Portanto $x=-2$ é máximo local, com $A(-2)=9\frac{\sqrt{3}}{2}$. Como $A(-4)=A(4)=0$, temos que $x=-2$ é máximo global.

Nesse caso as dimensões do triângulo são

$$b=6\quad\text{e}\quad h=3\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(4,0) **Questão 4.** Esboce, no espaço abaixo, o gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}e^{\frac{1}{x}}$, determinando:

i) o domínio de f e limites pertinentes;

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = [-\infty \cdot 1] = -\infty$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = [+\infty \cdot 1] = +\infty$

c) $\displaystyle\lim_{x\to0^-} \frac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = [0 \cdot 0] = 0$

d) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{x+1}{x^2}} \underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{\frac{-x-2}{x^3}} = \lim_{x\to0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{x+2}{x}} \underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{\frac{-2}{x^2}} = \lim_{x\to0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2} = +\infty$

e) $\displaystyle\lim_{x\to-1^-} \frac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = \left[-\infty \cdot \frac{1}{e}\right] = -\infty$

f) $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} \frac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = \left[+\infty \cdot \frac{1}{e}\right] = +\infty$

ii) os intervalos de crescimento e decrescimento de f;

$$f'(x) = \left(\frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} - \frac{x^2}{x^2(x+1)}\right)e^{\frac{1}{x}} = \frac{x^2+x-1}{(x+1)^2}e^{\frac{1}{x}}.$$

↗		↘		↘		↘		↗	f
$+$		$-$		$-$		$-$		$+$	x^2+x-1
$+$		$-$		$-$		$-$		$+$	f'
	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		-1		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		

$x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ é um ponto de máximo local e $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ é um ponto de mínimo local de f.

Temos que $f(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}) < -2$ e $f(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}) > 1$.

iii) concavidades e pontos de inflexão, sabendo-se que $f''(x) = \dfrac{x^2+1}{(x+1)^3x^2}e^{\frac{1}{x}}$;

$\cap$		$\cup$		$\cup$	f
$-$		$+$		$+$	$x+1$
$-$		$+$		$+$	f'
	-1		0		

f não admite ponto de inflexão.

iv) assíntotas, se existirem.

a) Temos que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^2}{x^2+x} \cdot e^{\frac{1}{x}} = [1 \cdot 1] = 1 = m.$

e $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 1x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2 - x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$

$\underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{-e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{1 + \frac{2}{x}} = 0 = n.$

Portanto, $y = 1x + 0$ é uma assíntota oblíqua (para $x \to +\infty$).

b) Analogamente, temos que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^2}{x^2+x} \cdot e^{\frac{1}{x}} = 1 = m.$

e $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - 1x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} - x \right) = 0 = n.$

Portanto, $y = 1x + 0$ é uma assíntota oblíqua (para $x \to -\infty$).

c) Como $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, então $x = 0$ é uma assíntota vertical.

d) Como $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = -\infty$, então $x = -1$ é uma assíntota vertical.

e) Como $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, então $x = -1$ é uma assíntota vertical.

f) Como existem assíntotas oblíquas, não existem assíntotas horizontais.

v) Portanto, o gráfico de f é: