

Questão 1. Calcule o limite ou justifique porque não existe:

a) (1,0 ponto) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5 \operatorname{sen} x}{x\sqrt{x} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)}$

b) (1,0 ponto) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right)$

c) (1,0 ponto) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3x^6 + 2} - \sqrt{3x^6 + 2x^3 - 5})$

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5 \operatorname{sen} x}{x\sqrt{x} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x\sqrt{x} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)} + \frac{5 \operatorname{sen} x}{x\sqrt{x} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)} + \frac{1}{x} \operatorname{sen} x \cdot \frac{5}{\sqrt{x} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)} = \textcircled{*} \end{aligned}$$

Note que:

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \operatorname{sen}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)}{\frac{3}{\sqrt{x}}} = 3 \quad \text{onde}$$

usamos o limite fundamental, uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = 0$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \operatorname{sen} x = 0 \quad \text{pelo corolário do Teorema do confronto, pois } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ e } |\operatorname{sen} x| \leq 1 \text{ (limitada).}$$

Logo,

$$\textcircled{*} = \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{5}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1 - x^2 - x^2}{x(x-2)} \right)$$

Note que:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 2} 1 - x^2 - x^2 = -5 \quad (\text{negativo})$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 2^-} x(x-2) = 0^- \quad (\text{tende para zero por valores negativos})$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 2^+} x(x-2) = 0^+ \quad (\text{tende para zero por valores positivos})$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right) = -\infty$$

o limite não existe pois os limites laterais são diferentes

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3x^6 + 2} - \sqrt{3x^6 + 2x^3 - 5})$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{3x^6 + 2} - \sqrt{3x^6 + 2x^3 - 5}) (\sqrt{3x^6 + 2} + \sqrt{3x^6 + 2x^3 - 5})}{(\sqrt{3x^6 + 2} + \sqrt{3x^6 + 2x^3 - 5})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^6 + 2 - 3x^6 - 2x^3 + 5}{\sqrt{3x^6 + 2} + \sqrt{3x^6 + 2x^3 - 5}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 (-2 + 7/x^3)}{|x^3| (\sqrt{3 + 2/x^6} + \sqrt{3 + 2/x^3 - 5/x^6})} =$$

Note que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{|x^3|} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^n} = 0, \quad n \geq 1$$

$$\Rightarrow * = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Questão 2. (3,5 pontos) Seja $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 3x} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right)}{3 + \operatorname{arctg} x}, & \text{se } x \neq 3 \\ 1, & \text{se } x = 3 \end{cases}$

- a) Determine todos os pontos em que f não é contínua. Justifique.
 b) Determine todos os pontos em que f não é derivável. Justifique.
 c) Calcule a derivada de f nos pontos em que f é derivável.

a) Se $x \neq 3$, f é contínua (quociente, produto e composta de funções contínuas é contínua).

Para $x = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \underbrace{\sqrt[3]{x^2 - 3x}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right)}_{\text{lim. toda}} \cdot \underbrace{\frac{1}{3 + \operatorname{arctg} x}}_{\rightarrow \frac{1}{7 + 0,472}} = 0 \neq f(3). \quad \text{Logo, } f \text{ não é contínua para } x = 3$$

b) Se $x \neq 0$ e $x \neq 3$, f é derivável (quociente, produto e composta de funções deriváveis)

Em $x = 3$ f não é derivável pois f não é contínua

Em $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x(x-3)} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right)}{x(3 + \operatorname{arctg} x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x-3} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right)}{\sqrt[3]{x^2} (3 + \operatorname{arctg} x)} = +\infty$$

Logo, f não é derivável em $x = 0$ e em $x = 3$.

c) Se $x \neq 0$ e $x \neq 3$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2x-3}{3\sqrt[3]{(x^2-3x)^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right) + \sqrt[3]{x^2-3x} \cos\left(\frac{1}{x-3}\right) \left(-\frac{1}{(x-3)^2}\right) \right) (3 + \operatorname{arctg} x) - \sqrt[3]{x^2-3x} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right) \cdot \frac{1}{1+x^2}}{(3 + \operatorname{arctg} x)^2}$$

Questão 3. (2,0 pontos) Sejam $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$, e $g(x) = 5 - 3 \sin x$. Determine a, b e c sabendo que f e g possuem mesma reta tangente no ponto de abscissa 0 e que o ponto $(0, -3)$ pertence à reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 2.

Como f e g possuem mesma reta tangente no ponto de abscissa 0,

temos que $f(0) = g(0)$ e $f'(0) = g'(0)$.

Mas $g(0) = 5$ e $f(0) = c$. Logo, $c = 5$.

$g'(x) = -3 \cos x$ e, portanto, $g'(0) = -3$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ e, portanto, $f'(0) = b$

Temos então que $b = -3$ e $f(x) = x^3 + ax^2 - 3x + 5$.

Dai, a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 2

tem equação $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$, ou seja,

$$y - (a \cdot 4 + 7) = (9 + 4a)(x - 2).$$

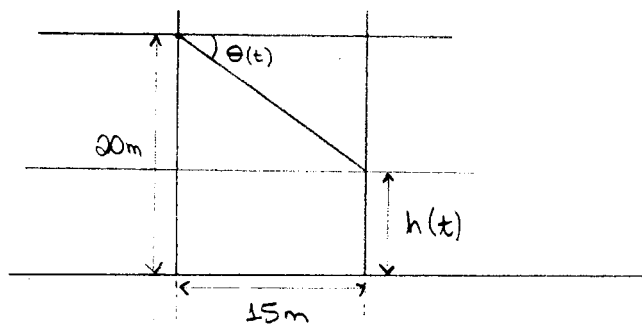
Como o ponto $(0, -3)$ pertence a esta reta, temos que

$$-3 - (4a + 7) = (9 + 4a) \cdot (-2)$$

donde segue que $a = -2$.

Temos portanto que $a = -2$, $b = -3$ e $c = 5$.

Questão 4. (1,5 ponto) Da janela de um prédio, a 20 metros do solo, um menino brinca com uma ponteira laser, movendo-a verticalmente e iluminando a parede do prédio vizinho, situado a uma distância de 15 metros. Num determinado instante, o ponto de luz está a uma altura de 11 metros e a velocidade com que ele sobe é de 10 metros por segundo. Determine a taxa de variação do ângulo formado entre a horizontal e o feixe de luz nesse instante.



Seja $h(t)$ a distância do ponto de luz ao solo no instante t
 e $\theta(t)$ o ângulo formado entre a horizontal e o feixe de luz no instante t .
 Sabemos que $h(t_0) = 11\text{m}$ e $h'(t_0) = 10\text{m/s}$

Observe que $\text{tg}(\theta(t)) = \frac{20 - h(t)}{15}$.

Daí, derivando, temos que $\sec^2(\theta(t)) \cdot \theta'(t) = -\frac{h'(t)}{15}$. (*)

Além disso, $\sec^2(\theta(t)) = 1 + \text{tg}^2(\theta(t)) = 1 + \left(\frac{20-11}{15}\right)^2 = \frac{34}{25}$.

Então, (*) em t_0 fica $\frac{34}{25} \theta'(t_0) = -\frac{10}{15}$.

Assim, $\theta'(t_0) = -\frac{25}{51} \text{ rad/s}$

Questão 1. Calcule o limite ou justifique porque não existe:

a) (1,0 ponto) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 4 \operatorname{sen} x}{x\sqrt{x} \operatorname{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}$

b) (1,0 ponto) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x^2 - 3x} - \frac{x+1}{x-3} \right)$

c) (1,0 ponto) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^6 + 2} - \sqrt{4x^6 + 3x^3 - 5})$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 4 \operatorname{sen} x}{x\sqrt{x} \operatorname{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x\sqrt{x} \operatorname{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)} + \frac{4 \operatorname{sen} x}{x\sqrt{x} \operatorname{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x} \operatorname{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)} + \left(\frac{1}{x} \operatorname{sen} x \right) \left(\frac{4}{\sqrt{x} \operatorname{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)} \right) = \textcircled{x}$$

Note que:

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \operatorname{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)} = 2 \quad \text{onde foi utilizado}$$

o limite fundamental, uma vez que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right) = 0$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \operatorname{sen} x = 0 \quad \text{pelo corolário do Teorema do Comparação,}$$

pois $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ & $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ (limitado)

(iii) Usando (i) & (ii) obtemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \operatorname{sen} x \right) \left(\frac{4}{\sqrt{x} \operatorname{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)} \right) = 0 \cdot 2 = 0$$

$$\Rightarrow \textcircled{x} = \frac{3}{2} + 0 = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x^2 - 3x} - \frac{x+1}{x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - x^2 - x}{x(x-3)}$$

Note que

$$\lim_{x \rightarrow 3} 1 - x^2 - x = -11 \quad (\text{negativo})$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} x(x-3) = 0^+ \quad (\text{tende à zero por valores positivos})$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} x(x-3) = 0^- \quad (\text{tende à zero por valores negativos})$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{1}{x^2 - 3x} - \frac{x+1}{x-3} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{1}{x^2 - 3x} - \frac{x+1}{x-3} \right) = +\infty$$

\Rightarrow O limite não existe pois os limites laterais são diferentes

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x+2} - \sqrt{4x^6+3x^3-5} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^6+2} - \sqrt{4x^6+3x^3-5})(\sqrt{4x^6+2} + \sqrt{4x^6+3x^3-5})}{\sqrt{4x^6+2} + \sqrt{4x^6+3x^3-5}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^6+2 - 4x^6 - 3x^3 + 5}{\sqrt{4x^6+2} + \sqrt{4x^6+3x^3-5}} = \frac{x^3(-3 + 7/x^3)}{|x^3|(\sqrt{4+2/x^6} + \sqrt{4+3/x^3-5/x^6})} = \textcircled{*}$$

Note que:

$$(i) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{|x^3|} = -1$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^n} = 0 \quad (n \geq 1)$$

\Rightarrow $\textcircled{*} = \frac{3}{4}$

Questão 2. (3,5 pontos) Seja $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2x} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right)}{4 + \operatorname{arctg} x}, & \text{se } x \neq 2 \\ 1, & \text{se } x = 2 \end{cases}$

- Determine todos os pontos em que f não é contínua. Justifique.
- Determine todos os pontos em que f não é derivável. Justifique.
- Calcule a derivada de f nos pontos em que f é derivável.

a) Se $x \neq 2$, f é contínua (quociente, produto e composta de funções contínuas é contínua)

Para $x=2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2x} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right)}{4 + \operatorname{arctg} x} = 0 \neq f(2). \text{ Logo, } f \text{ não é contínua em } x=2.$$

b) Se $x \neq 0$ e $x \neq 2$, f é derivável (quociente, produto e composta de funções deriváveis)

Em $x=2$, f não é derivável pois f não é contínua

Em $x=0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2x} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right)}{\sqrt[3]{x^2} (4 + \operatorname{arctg} x)} = +\infty$$

Logo, f não é derivável em $x=0$ e em $x=2$

c) Se $x \neq 0$ e $x \neq 2$:

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2x-2}{3\sqrt[3]{x^2-2x}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right) + \sqrt[3]{x^2-2x} \cos\left(\frac{1}{x-2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right) \right) (4 + \operatorname{arctg} x) - \sqrt[3]{x^2-2x} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right) \cdot \frac{1}{1+x^2}}{(4 + \operatorname{arctg} x)^2}$$

-B-

Questão 3. (2,0 pontos) Sejam $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$, e $g(x) = 7 - 5 \sin x$. Determine a, b e c sabendo que f e g possuem mesma reta tangente no ponto de abscissa 0 e que o ponto $(0, -1)$ pertence à reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 2.

Como f e g possuem mesma reta tangente no ponto de abscissa 0,

temos que $f(0) = g(0)$ e $f'(0) = g'(0)$.

Mas $g(0) = 7$ e $f(0) = c$. Logo, $c = 7$

$g'(x) = -5 \cos x$ e, portanto, $g'(0) = -5$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ e, portanto, $f'(0) = b$

Temos então que $b = -5$ e $f(x) = x^3 + ax^2 - 5x + 7$.

Dai, a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 2

tem equação $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$, ou seja,

$$y - (4a + 5) = (4a + 7)(x - 2)$$

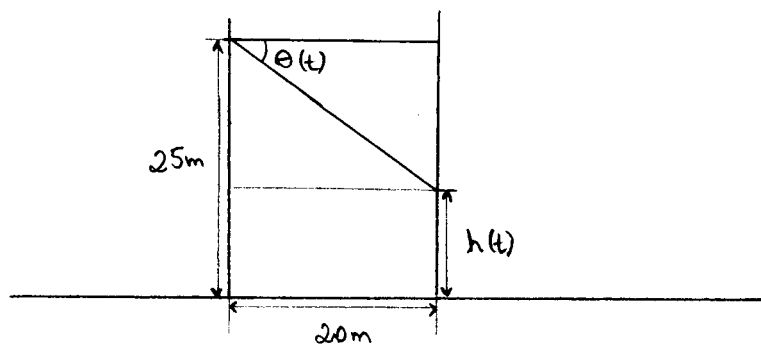
Como o ponto $(0, -1)$ pertence a essa reta, temos que

$$-1 - (4a + 5) = (4a + 7) \cdot (-2)$$

donde segue que $a = -2$.

Temos portanto que $a = -2$, $b = -5$ e $c = 7$.

Questão 4. (1,5 ponto) Da janela de um prédio, a 25 metros do solo, um menino brinca com uma ponteira laser, movendo-a verticalmente e iluminando a parede do prédio vizinho, situado a uma distância de 20 metros. Num determinado instante, o ponto de luz está a uma altura de 10 metros e a velocidade com que ele sobe é de 16 metros por segundo. Determine a taxa de variação do ângulo formado entre a horizontal e o feixe de luz nesse instante.



Seja $h(t)$ a distância do ponto de luz ao solo no instante t e

$\theta(t)$ o ângulo formado entre a horizontal e o feixe de luz no instante t .

Sabemos que $h(t_0) = 10\text{m}$ e $h'(t_0) = 16\text{m/s}$.

Observe que $\text{tg}(\theta(t)) = \frac{25 - h(t)}{20}$.

Dalí, derivando, obtemos que $\sec^2(\theta(t)) \cdot \theta'(t) = \frac{-h'(t)}{20}$ (*)

Além disso, $\sec^2(\theta(t_0)) = 1 + \text{tg}^2(\theta(t_0)) = 1 + \left(\frac{25 - 10}{20}\right)^2 = \frac{25}{16}$.

Então, (*) em t_0 fica $\frac{25}{16} \theta'(t_0) = -\frac{16}{20}$.

Assim, $\theta'(t_0) = -\frac{64}{125} \text{rad/s}$.