MAT5711 — Cálculo Avançado

Segunda Prova — 30/05/2016

INSTRUÇÕES

1. Escolha até quatro questões de modo tal que a soma não exceda 11 pontos.
2. Indique suas opções na primeira página da folha de respostas.
3. Justifique todas as passagens em suas soluções.

QUESTÕES

Questão 1 (Valor: 2.0 pontos)**.** Sejam M uma n-variedade compacta com bordo em $\mathbb{R}^n$ e N um campo normal a ∂M, unitário e que aponta para fora de M.

a. Mostre que o operador de divergência satisfaz a seguinte regra

$$\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + \langle \nabla f, X \rangle,$$

para toda função $f \in \mathscr{F}(M)$ e todo campo $X \in \mathscr{X}(M)$.

b. Mostre que $\int_M \langle \nabla f, X \rangle = \int_{\partial M} f \langle X, N \rangle \mathrm{d}S - \int_M f \operatorname{div}(X)$. Reescreva essa formula quando M é um intervalo fechado em $\mathbb{R}$ e (talvez) surpreenda-se.

Questão 2 (Valor: 2.0 pontos)**.** Mostre que o conjunto $X = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \operatorname{Posto}(A) = 1\}$, é uma subvariedade de dimensão 3 em $\mathbb{R}^4 = M_2(\mathbb{R})$. Decida se X é orientável, exibindo um campo normal unitário a X em caso afirmativo.

Dica. Inspire-se no que foi feito em aula num caso semelhante ou pense na função determinante em $M_2(\mathbb{R}) \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Questão 3 (Valor: 2.0 pontos)**.** Seja M uma n-variedade em $\mathbb{R}^{n+1}$. Mostre que M é orientável se e somente se existe uma n-forma que nunca se anula sobre M.

Questão 4 (Valor: 3.0 pontos)**.** Calcule:

a. $\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}r$, onde $F = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} + z,\ \frac{x}{x^2+y^2},\ \ln(2+z^{10}) \right)$ e γ é dada pela interseção das superfícies $x^2+y^2=9$ e $z=y^2$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy é percorrida no sentido horário.

b. $\int_S \langle F, N \rangle \, \mathrm{d}S$, onde $F = (z^3e^x,\ x^2y - z^3ye^x,\ -x^2z + x^2 + z^2)$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 5, z \geq 0\}$ e N é a normal à esfera tal que $\langle N, (0,0,1) \rangle \geq 0$.

Dica. Lembre-se: Stokes é nosso amigo!

Questão 5 (Valor: 3.0 pontos)**.** Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ um aberto limitado tal que sua fronteira seja uma variedade de classe $\mathcal{C}^1$ orientada com normal unitário n apontando para fora de M e $\mathbf{0} \notin \partial M$. Mostre que

$$\int_{\partial M} \frac{\langle x, n \rangle}{\|x\|^3} \, \mathrm{d}S = \begin{cases} 0, \text{ se } \mathbf{0} \notin M, \\ 4\pi, \text{ se } \mathbf{0} \in M. \end{cases}$$

Questão 6 (Valor: 3.0 pontos)**.** Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto contendo o disco unitário $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ e $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$, onde $f^2(x,y) + g^2(x,y) = 1$.

a. Mostre que $f_x g_y - f_y g_x = 0$ em Ω.

b. Sendo $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$, calcule $\int_{\mathbb{S}^1} f\,dg - g\,df$.

c. Conclua que não pode existir função ϕ com as propriedades acima tal que sua restrição a $\mathbb{S}^1$ seja a identidade.

BOA PROVA!