MAT5711 — Cálculo Avançado

Segunda Prova — 14/06/2012

Escolha duas dentre as três primeiras questões e mais duas dentre as três útilmas questões. Indique suas opções na primeira página da folha de respostas e justifique todas as passagens.

Questão 1 (Valor: $3,0 = 1,0 + 2,0$ pontos)**.** Sejam M uma k-variedade em $\mathbb{R}^n$ e

$$TM = \{(p, v_p) : p \in M, v_p \in T_pM\},$$

seu fibrado tangente.

a. Mostre que TM é uma $2k$-variedade em $\mathbb{R}^{2n}$.
b. Mostre que TM sempre é uma variedade orientável.

Questão 2 (Valor: $3,0$ pontos)**.** Mostre que o conjunto das matrizes $m \times n$ de posto r é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{mn}$ de *codimensão* $(m-r)(n-r)$.

Dica. Você pode supor, para simplificar, que uma matriz $m \times n$ tem a forma

$$A = \begin{bmatrix} B_{r\times r} & C_{r\times n-r} \\ D_{m-r\times r} & E_{m-r\times n-r} \end{bmatrix},$$

onde B é não singular. Use isso para verificar que A tem posto r se, e somente se, $E = DB^{-1}C$. Para isso pense na matriz

$$\begin{bmatrix} Id & -B^{-1}C \\ 0 & Id \end{bmatrix}.$$

Questão 3 (Valor: $2,0$ pontos)**.** Seja M uma n-variedade em $\mathbb{R}^{n+1}$. Mostre que M é orientável se e somente se existe uma n-forma que nunca se anula sobre M.

Questão 4 (Valor: $2,5$ pontos)**.** Sejam M uma n-variedade orientada, compacta e com bordo em $\mathbb{R}^n$, $X = \partial M$ e Y uma $n-1$-variedade em $\mathbb{R}^n$. Seja ainda $f : X \to Y$ uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$ que admite uma extensão a M, também de classe $\mathcal{C}^\infty$. Mostre que se $\omega \in \Omega^{n-1}(Y)$ então

$$\int_X f^*\omega = 0.$$

Questão 5 (Valor: $2,5$ pontos)**.** Lembremos que duas funções $f, g : X \to Y$ são diferenciavelmente homotópicas se existe função diferenciável $F : [0,1] \times X \to Y$ tal que, para todo $x \in X$ temos $F(0,x) = f(x)$ e $F(1,x) = g(x)$.

Sejam X e Y k-variedades sem bordo, compactas e orientadas em $\mathbb{R}^{k+1}$ e funções $f, g : X \to Y$ diferenciáveis e diferenciavelmente homotópicas. Mostre que, para toda k-forma ω em Y temos

$$\int_X f^*\omega = \int_X g^*\omega.$$

Dica. Utilize-se do resultado do exercício anterior.

Questão 6 (Valor: 3.0 pontos)**.** Calcule:

a. $\displaystyle\int_\gamma F dr$, onde $F(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{z^3}{1+z^2}\right)$ e γ é a curva dada pela interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e o plano $x + y + z = 4$ orientada de modo tal que sua projeção no plano $z = 0$ seja percorrida no sentido horário;

b. $\displaystyle\int_S y^2z^2\, dy \wedge dz + x\, dz \wedge dx + y\, dx \wedge dy$, onde S é a parte da superfície $z^2 = x^2 + 2y^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = y + 3$, orientada pela normal unitária $n(p)$ tal que $\langle n(p), e_3\rangle < 0$.

c. $\displaystyle\int_S x\, dy \wedge dz + yze^{z^2}\, dz \wedge dx + -\frac{e^{z^2}}{2}\, dx \wedge dy$, onde S é a parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$, limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ orientada pela normal $n(p)$ tal que $\langle n(p), e_3\rangle > 0$.

BOA PROVA!