MAT5711 — Cálculo Avançado

Primeira Prova — 11/04/2016

Escolha duas dentre as três primeiras questões e mais duas dentre as três útilmas questões. Indique suas opções na primeira página da folha de respostas e justifique todas as passagens.

Questão 1 (Valor: $3,0$ pontos)**.** Calcule explicitamente o volume da bola unitária euclideana em $\mathbb{R}^n$, isto é, o volume de $B_1^n(0) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_n^2 \le 1\}$ executando os seguintes passos:

a. Denotando por α_n o volume de $B_1^n(0)$ mostre que $\alpha_n = 2\alpha_{n-1} I_n$, onde I_n é dado por

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\, dt.$$

b. Mostre que $\alpha_n = 4\alpha_{n-2} I_n I_{n-1}$, para todo $n \ge 2$.

c. Mostre que $I_n I_{n-1} = \pi/(2n)$, para todo $n \ge 2$.

d. Deduza que

$$\alpha_{2m} = \frac{\pi^m}{m!} \quad \text{e} \quad \alpha_{2m+1} = \frac{2^{m+1}\pi^m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+1)}.$$

Questão 2 (Valor: $2,0$ pontos)**.** Seja $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ dada por $\alpha(t) = \big(0, \ldots, 0, f(t), t\big)$, onde f é uma função limitada e estritamente positiva de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Considere a rotação da imagem desta curva, em torno do eixo Ox_n, bem como os planos $x_n = a$ e $x_n = b$. Seja S a região do $\mathbb{R}^n$ limitada por estes três objetos.

a. Exiba um difeomorfismo entre S e o cilindro $B_1^{n-1}(0) \times [a,b]$.

b. Calcule o volume de S em termos de $f(t)$ e o volume de $B_1^{n-1}(0)$ (você pode usar o resultado do exercício acima, se quiser).

Questão 3 (Valor: $2,0$ pontos)**.** Seja A um aberto estrelado em relação à origem de $\mathbb{R}^n$. Considere a aplicação $I : \Omega^2(A) \to \Omega^1(A)$ definida por

$$I(\omega) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \left(\int_0^1 t\omega_{i_1 i_2}(tx)dt\right) x_{i_1} dx_{i_2} - \left(\int_0^1 t\omega_{i_1 i_2}(tx)dt\right) x_{i_2} dx_{i_1},$$

para cada $\omega \in \Omega^2(A)$ tal que

$$\omega_x = \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \omega_{i_1 i_2}(x)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2}.$$

a. Calcule $I(dw) + d(Iw)$.

b. Conclua que se ω é fechada em A então ela também é exata em A.

Observação 0.1. Definimos o operador $I : \Omega^3(A) \to \Omega^2(A)$ em sala durante o exame.

Questão 4 (Valor: $3,0$ pontos)**.** Considere o operador linear $* : \Omega^k(A) \to \Omega^{n-k}(A)$, onde A é um aberto do $\mathbb{R}^n$, caracterizado da seguinte maneira

Se $\omega = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$ então $*\omega$ é a $n-k$-forma básica tal que $\omega \wedge (*\omega) = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

a. Supondo $n = 2$ determine $*(f dx_1 + g dx_2)$.

b. Supondo $n = 3$ determine $*(f dx_1 \wedge dx_2 + g dx_2 \wedge dx_3 + h dx_3 \wedge dx_1)$.

c. Supondo $n = 4$ e $k = 2$ mostre que $* \circ * = Id$ e descreva os autoespaços associados aos autovalores 1 e -1 de $*$.

Questão 5 (Valor: $2,0$ pontos)**.** Sejam ω uma 1-forma diferencial em $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^\infty$ que nunca se anula tal que $d(f\omega) = 0$.

a. Mostre que $\omega \wedge d\omega = 0$.

b. Discuta a validade a afirmação acima para o caso de k-formas em geral.

Questão 6 (Valor: 2.0 pontos)**.** Sejam $\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ e $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a projeção usual, ou seja, $\pi(u,v,w) = (u,v)$. Mostre diretamente que o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
\Omega^1(\mathbb{R}^2) \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[d, "d"'] & \Omega^1(\mathbb{R}^3) \arrow[d, "d"'] \\
\Omega^2(\mathbb{R}^2) \arrow[r, "\pi^*"] & \Omega^1(\mathbb{R}^3)
\end{tikzcd}$$

BOA PROVA!