MAT5711 — Cálculo Avançado

Primeira Prova — 09/05/2012

Escolha duas dentre as três primeiras questões e mais duas dentre as três útilmas questões. Indique suas opções na primeira página da folha de respostas e justifique todas as passagens.

Questão 1 (Valor: 2,0 pontos)**.** Calcule o volume da bola unitária euclideana em $\mathbb{R}^4$, isto é, o volume de $B = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq 1\}$.

Dica. Calcule inicialmente o volume de uma bola de raio r em $\mathbb{R}^3$ e use isso para determinar o volume pedido.

Questão 2 (Valor: 2,0 pontos)**.** Sejam $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $p_n > 0$ e $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ um conjunto limitado J-mensurável. Defina $S \subset \mathbb{R}^n$ por

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : x = (1-t)a + tp, \text{ para todo } a \in A \times \{0\} \text{ e } 0 < t < 1.\}.$$

Determine o volume de S em termos do volume de A.

Dica. Procure um difeomorfismo entre S e $A \times (0, 1)$.

Questão 3 (Valor: 3,0 pontos)**.** Sejam A e B subconjuntos J-mensuráveis de $\mathbb{R}^n$. Mostre que uma função $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ é integrável se e somente se as restrições $f|_A : A \to \mathbb{R}$ e $f|_B : B \to \mathbb{R}$ são funções integráveis e, nesse caso,

$$\int_{A \cup B} f + \int_{A \cap B} f = \int_A f|_A + \int_B f|_B.$$

Questão 4 (Valor: 3,0 pontos)**.** Seja A um aberto de $\mathbb{R}^3$ e denote repesctivamente por $\mathscr{F}(A)$ e $\mathscr{X}(A)$ os conjuntos dos campos escalares e de vetores sobre A.

a. Mostre que existem isomorfismos lineares α_i, $0 \leq i \leq 1$, e β_j, $2 \leq j \leq 3$, definidos como no diagrama (0.1) abaixo tais que $d \circ \alpha_0 = \alpha_1 \circ \nabla$, $d \circ \alpha_1 = \beta_2 \circ \text{rot}$ e $d \circ \beta_2 = \beta_3 \circ \text{div}$.

b. Use o item anterior para concluir que $\text{rot} \circ \nabla \equiv 0$ e $\text{div} \circ \text{rot} \equiv 0$.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathscr{F}(A) & \xrightarrow{\nabla} & \mathscr{X}(A) & \xrightarrow{\text{rot}} & \mathscr{X}(A) & \xrightarrow{\text{div}} & \mathscr{F}(A) \\ {\scriptstyle\alpha_0}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_1}\downarrow & & {\scriptstyle\beta_2}\downarrow & & {\scriptstyle\beta_3}\downarrow \\ \Omega^0(A) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(A) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(A) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(A) \end{array} \tag{0.1}$$

Questão 5 (Valor: 2,0 pontos)**.** Sejam $k \geq 1$ e ω uma k-forma diferencial em $\mathbb{R}^n$.

a. Mostre que $\omega \wedge \omega = 0$.

b. O item acima implica que $\omega \wedge d\omega = 0$? Prove ou dê um contra-exemplo.

c. Mostre que se $k = n - 1$ então $\omega \wedge d\omega = 0$.

Questão 6 (Valor: 3.0 pontos)**.** Mostre que a 1-cadeia $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } z = 0\}$ não pode ser o bordo de nenhuma 2-cadeia em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

BOA PROVA!