MAT-5711 – CÁLCULO AVANÇADO
SÉTIMA LISTA DE EXERCÍCIOS – LEMA DE POINCARÉ E GRUPOS DE DERHAM

PROF. ALEXANDRE LYMBEROPOULOS

Exercício 1.
a. Reescreva o enunciado do Lema de Poincaré em termos de campos escalares e campos vetoriais de $\mathbb{R}^3$ para k-formas, onde $0 \leq k \leq 3$.
b. Interprete de maneira análoga os resultados sobre duas $k-1$-formas que têm a mesma diferencial, quando $1 \leq k \leq 3$.

Exercício 2.
a. Seja $g : A \to B$ um difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^\infty$ entre abertos do $\mathbb{R}^n$. Mostre que se A é homologicamente trivial em dimensão k se e somente se B também o é.
b. Encontre um aberto em $\mathbb{R}^2$ que não seja estrelado e seja homologicamente trivial em todas as dimensões.

Exercício 3. Mostre que um aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ é homologicamente trivial em dimensão 0 se e somente se A é conexo (por caminhos).

Exercício 4. Trasncreva os teoremas de caracterização das formas fechadas que são exatas em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ para a linguagem de campos escalares e campos vetoriais quando $n = 2$ e $n = 3$.

Exercício 5. Sejam U e V abertos de $\mathbb{R}^n$ tais que $X = U \cup V$ e $A = U \cap V \neq \emptyset$. Seja também

$$\begin{array}{cccc} \tilde{\delta} & : & H^k(A) & \to & H^{k+1}(X) \\ & & \omega + E^k(A) & \mapsto & \delta(\omega) + E^{k+1}(X) \end{array},$$

onde $\delta : \Omega^k(A) \to \Omega^{k+1}(X)$ é calculada em cada $\omega \in C^k(A)$ e dada por

$$\delta(\omega) = \begin{cases} d\varphi \wedge \omega & \text{em } A, \\ 0 & \text{numa vizinhança de } U' \cup V'., \end{cases}$$

sendo $\varphi : X \to [0,1]$ uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$ tal que $\varphi(x) = 0$, para todo $x \in U'$ e $\varphi(x) = 1$ para todo $x \in V'$ com U' vizinhança aberta de $U \setminus A$ e V' vizinhança aberta de $V \setminus A$. Determine hipóteses sobre $H^i(U)$ e $H^i(V)$ para que
a. $\tilde{\delta}$ seja injetora;
b. a imagem de $\tilde{\delta}$ seja $H^{k+1}(X)$;
c. $H^0(X)$ seja trivial.

Exercício 6. Sejam p e q pontos de $\mathbb{R}^n, n \geq 1$. Mostre que

$$\dim H^k\big(\mathbb{R}^n \setminus \{p,q\}\big) = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq n-1, \\ 2, & \text{se } k = n-1. \end{cases}$$

Dica. Estude a trivialidade da homologia do aberto $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \big(\{p,q\} \times H^1\big)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ todas as dimensões e prossiga por indução.

Exercício 7. Traduza o resultado acima em termos de formas diferenciais e estabeleça critérios para que uma forma fechada em $\mathbb{R}^n \setminus \{p,q\}$ seja exata.

Exercício 8. Reescreva os critérios acima em termos de campos escalares e campos de vetores em $\mathbb{R}^n \setminus \{p,q\}$ para $n = 2$ ou $n = 3$.