MAT-5711 – CÁLCULO AVANÇADO
SEXTA LISTA DE EXERCÍCIOS – TEOREMA DE STOKES E CERCANIAS

PROF. ALEXANDRE LYMBEROPOULOS

Exercício 1. Seja $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4, y \geq 0\}$. A $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por aplicação $\alpha(u,v) = (u, 2(1-u^2-v^2)^{1/2}, v)$, quando restrita ao aberto $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$, é um sistema de coordenadas que cobre $M \setminus \partial M$. Suponha M orientada de modo que α pertença à essa orientação e considere ∂M com a orientação induzida.

a. Determine o vetor normal unitário a M correspondente a essa orientação e também o vetor tangente a ∂M correspondente à orientação induzida.
b. Seja $\omega = y\,dx + 3x\,dz$. Calcule $\int_{\partial M} \omega$ diretamente.
c. Calcule $\int_M d\omega$ diretamente.

Exercício 2. Suponha que existe $\eta \in \Omega(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ tal que

$$d\eta = 0 \qquad \text{e} \qquad \int_{S^{n-1}} \eta \neq 0.$$

Mostre que η não pode ser exata.

Exercício 3. Sejam $B^3(r)$ a bola de raio r em $\mathbb{R}^3$ com a orientação natural e $S^2(r)$ seu bordo com a orientação induzida. Suponha que $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ satisfaz

$$\int_{S^2(r)} w = a + \frac{b}{r}, \text{ para cada } r > 0.$$

a. Dada $0 < c < d$, seja $M = \{x \in \mathbb{R}^3, c \leq \|x\| \leq d\}$ orientada naturalmente. Calcule $\int_M d\omega$.
b. Se ω é fechada, o que se pode dizer sobre a e b?
c. Se ω é exata, o que se pode dizer sobre a e b?

Exercício 4. Seja M uma $k+l+1$-variedade orientada e sem bordo em $\mathbb{R}^n$. Sejam ω uma k-forma e η uma l-forma, definidas numa aberto que contém M. Mostre que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_M \omega \wedge d\eta = a \int_M d\omega \wedge \eta.$$

Determine explicitamente a.

Exercício 5. Seja ω uma $k-1$-forma sobre uma k-variedade compacta sem bordo M. Mostre que $\int_M d\omega = 0$ e dê um contra-exemplo se M não é compacta.

Exercício 6. Sejam M_1 uma n-variedade com bordo em $\mathbb{R}^n$ e $M_2 \subset M_1 \setminus \partial M_1$ outra n-variedade com bordo, ambas compactas. Mostre que

$$\int_{\partial M_1} \omega = \int_{\partial M_2} \omega,$$

para toda $n-1$-forma fechada ω em M_1 onde ∂M_1 e ∂M_2 têm as orientações induzidas pela orientação usual de M_1 e de M_2.

Exercício 7. Mostre que se existe uma k-forma que nunca se anula sobre uma k-variedade M, então M é orientável.

Exercício 8. Sejam F o campo de vetores em $\mathbb{R}^3$ dado por $F(x,y,z) = (0,0,cz)_{(x,y,z)}$ e M uma 3-variedade com bordo, tal que $M \subset A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 0\}$. Podemos pensar em F como a pressão de um fluído de densidade c sobre A. Definimos o *empuxo* sobre M por $-\int_{\partial M}\langle F,n\rangle dA$. Mostre então o princípio de Arquimedes (aquele mesmo, o do logotipo do IME-USP):

"Todo corpo mergulhado num fluido em repouso sofre, por parte do fluido, uma força vertical para cima, cuja intensidade é igual ao peso do fluido deslocado pelo corpo."

Exercício 9. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Uma função $f : U \to \mathbb{R}$ é *harmônica* se, para todo $x \in U$, $\Delta f(x) = \sum f_{x_i x_i}(x) = 0$. Mostre que f é harmônica se, e somente se, para toda 2-variedade orientada naturalmente, compacta e com bordo $M \subset U$ temos

$$\int_{\partial M} \frac{\partial f}{\partial n} = 0,$$

onde $\dfrac{\partial f}{\partial n}$ é a derivada de f na direção da normal n dada pela orientação induzida.

Exercício 10. Sejam $u, v : U \to \mathbb{R}$ funções de classe $\mathcal{C}^2$ sobre o aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Se $M \subset U$ é uma 2-variedade compacta com bordo orientada naturalmente, obtenha a primeira identidade de Green:

$$\int_M u\Delta v + \langle \nabla u, \nabla v\rangle = \int_{\partial M} u\frac{\partial v}{\partial n}.$$

Fazendo $u = v$ conclua que se u é harmônica e se anula em ∂M então $u(x) = 0$ para todo $x \in M$.

Dica. Use o teorema da divergência em $\mathbb{R}^n$. Você pode enunciá-lo e demonstrá-lo de maneira análoga à feita em sala.

Exercício 11. Nas mesmas condições acima deduza a segunda identidade de Green:

$$\int_M u\Delta v - u\Delta u = \int_{\partial M} u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}.$$

Exercício 12. Use o teorema do ponto fixo de Brouwer para provar o seguinte teorema:

Teorema 0.1 (Perron-Frobenius)**.** *Seja A uma matriz $n \times n$ de entradas positivas. Então A admite um autovalor real simples, λ, tal que qualquer outro autovalor μ de A satisfaz $|\mu| < \lambda$. Além disso, existe um autovetor de A, associado a λ, cujas entradas são estritamente positivas e valem as seguintes estimativas*

$$\min_i \sum_j a_{ij} \leq \lambda \leq \max_i \sum_j a_{ij}.$$

Observação 0.1. O teorema acima tem muitas aplicações concretas interessantes. Em particular, o modelo de "page ranking" utilizado pelo Google para ordenar a exibição das páginas de uma dada busca utiliza isso. Pergunte ao seu professor como isso funciona! $\ddot\smile$