MAT-5711 – CÁLCULO AVANÇADO
QUINTA LISTA DE EXERCÍCIOS – ORIENTAÇÃO DE SUBVARIEDADES EM $\mathbb{R}^n$

PROF. ALEXANDRE LYMBEROPOULOS

Exercício 1. Sejam M o cilindro $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1, 0 \le z \le 1\}$. Considere a orientação de M tal que o sistema de coordenadas $\alpha : (0,1)^2 \to \mathbb{R}^3$ dado por $\alpha(u,v) = (\cos 2\pi u, \sin 2\pi u, v)$ pertence à orientação. Descreva o vetor normal unitário a M correspondente a esta orientação de M e o vetor tangente unitário correspondente à orientação induzida em ∂M.

Exercício 2. Seja $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le \|x\| \le 2\}$ subvariedade de $\mathbb{R}^3$ com a orientação natural. Descreva o vetor normal associado à orientação induzida sobre ∂M.

Exercício 3. Seja $B^n(1)$ a bola unitária de $\mathbb{R}^n$ orientada naturalmente. Considere a esfera unitária como bordo de $B^n(1)$, isto é, $S^{n-1}(1) = \partial B^n(1)$ com a orientação induzida. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é o interior de $B^{n-1}(1)$, o sistema de coordenadas $\alpha : A \to S^{n-1}(1)$, dado por $\alpha(u) = \left(u, \sqrt{1-\|u\|^2}\right)$ pertence à orientação de $S^{n-1}(1)$?

Exercício 4. Sejam M uma $n-1$-variedade em $\mathbb{R}^n$, $n(p)$ um campo normal a M em p e $\epsilon > 0$ tal que $M(\epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = p \pm \epsilon n(p), p \in M\}$ ainda seja uma $n-1$-variedade em R^n. Mostre que $M(\epsilon)$ é orientável, independentemente da orientabilidade de M. Descreva $M(\epsilon)$ quando M é a faixa de Möbius.

Exercício 5. (Multiplicadores de Langrange) Seja $g : A \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ tal que se $x \in g^{-1}(0)$ então $Dg(x)$ tem posto n. Se $f : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}$ é diferenciável e um máximo (ou mínimo) de $f|_{g^{-1}(0)}$ ocorre em p mostre que existem $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial g^i}{\partial x_j}(p), \text{ para } j = 1, \dots, n.$$

Exercício 6. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear auto-adjunta e $A = (a_{ij})$ sua matriz, a qual é simétrica.

a. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = \langle T(x), x\rangle$, mostre que

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 2\sum_{i=1}^{n} a_{kj} x_j.$$

b. Justifique por que $f|_{S^{n-1}}$ tem máximo e mostre que existem $x \in S^{n-1}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $T(x) = \lambda x$.

c. Mostre que se $V = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle = 0\}$ então $T(V) \subset V$ e que $T : V \to V$ é auto-adjunto.

d. Conclua que existe uma base de $\mathbb{R}^n$ constituída por autovetores de T.