MAT-5711 – CÁLCULO AVANÇADO
TERCEIRA LISTA DE EXERCÍCIOS – TENSORES E FORMAS DIFERENCIAIS

PROF. ALEXANDRE LYMBEROPOULOS

Exercício 1. Se ω um 1-tensor em $\mathbb{R}^n$ então existe uma matriz $1 \times n$, digamos A, tal que $\omega(y) = Ay$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Se $T \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ determine a matriz que representa o 1-tensor $T^*\omega$ em R^m.

Exercício 2. Mostre que se ω é um tensor simétrico então $Alt(\omega) = 0$. Vale a recíproca?

Exercício 3. Sejam $x_1, \ldots, x_k$ vetores em $\mathbb{R}^n$ e $X = [x_1 \cdots x_k]$. Se $I = (i_1, \ldots, i_k)$ é uma $k-$upla arbitrária do conjunto $\{1, \ldots, n\}$ mostre que

$$\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \phi_{i_k}(x_1, \ldots, x_k) = \det(X_I).$$

Exercício 4. Seja $\omega : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ um 2-tensor alternado. Mostre que, se m é ímpar, então existe $v \in \mathbb{R}^m$ não nulo tal que $\omega(v, u) = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^m$.

Exercício 5. Mostre que a cada $\omega \in \Lambda^{m-1}(\mathbb{R}^m)$ corresponde um único $v \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\omega \wedge f(v_1, \ldots, v_m) = f(v) \operatorname{vol}(v_1, \ldots, v_m),$$

para toda $f \in \Lambda^1(\mathbb{R}^m)$ e todos $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^m$. Mostre ainda que a correspondência $\omega \mapsto v$ é um isomorfismo entre os espaços vetoriais $\Lambda^{m-1}(\mathbb{R}^m)$ e $\mathbb{R}^m$.

Dica. Basta verificar para qualquer base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^m$.

Exercício 6. Mostre que se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : R^m \to \mathbb{R}^k$ são diferenciáveis então $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ e $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Exercício 7. Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ uma curva diferenciável. Mostre que o vetor velocidade de γ no instante t é $v = \gamma_*(t)(1)$. Mostre também que se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável, então o vetor tangente a $f \circ \gamma$ em t é $f_*(v)$.

Exercício 8. Considere as 1-formas em $\mathbb{R}^3$ dadas por

$$\begin{aligned} \omega &= xy\,dx + 3\,dy - yz\,dz \text{ e} \\ \eta &= x\,dx - yz^2\,dy + 2x\,dz. \end{aligned}$$

Mostre, calculando diretamente, que $d^2\omega = 0$ e $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta - \omega \wedge d\eta$.

Exercício 9. Seja $\omega \in \Omega^k(A)$, onde $A \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto. Dizemos que ω é nula em $x \in A$ se $\omega(x)$ é o 0-tensor.

a. Mostre que se ω é nula numa vizinhança de $x_0 \in A$ então $d\omega$ é nula de em x_0.
b. Construa um exemplo onde ω é nula em x_0, mas $d\omega$ não é nula em x_0.

Exercício 10. Sejam $\eta, \theta \in \Omega^1(A)$, onde A é aberto de $\mathbb{R}^3$ tais que $\eta \wedge \theta(x) \neq 0$ para todo $x \in A$. Se ω é uma forma satisfazendo $\omega \wedge \eta = \omega \wedge \theta = 0$ mostre que existe $f : A \to \mathbb{R}$ tal que $\omega = f\,\eta \wedge \theta$.

Exercício 11. Sejam $\omega, \eta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$. Se $\omega(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$ e $\omega \wedge \eta = 0$ então existe uma função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, de classe C^1, tal que $\eta = f\,\omega$.

Exercício 12. Sejam $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $d(f\omega) = 0$ se e somente se a 1-forma $\alpha = \omega - 1/f\, dx_{n+1}$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ satisfaz $\alpha \wedge d\alpha = 0$.

Exercício 13. Seja $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e considere a 1-forma dada por

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2}\, dx + \frac{y}{x^2+y^2}\, dy.$$

Mostre que ω é fechada e exata em A.

Exercício 14. Sejam $A = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e m um inteiro positivo fixado. Considere a $n-1$ forma em A dada por

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} f_i\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

onde $f_i(x) = x/|x|^m$ e $\widehat{dx_i}$ significa que dx_i é omitido daquela parcela.

a. Calcule $d\eta$.
b. Para quais valores de m temos $d\eta = 0$?

Exercício 15. O operador $d : \Omega^k(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ pode ser visto como um tipo de derivada direcional. Isso é que o garante o teorema abaixo, que será demonstrado neste exercício.

Teorema 0.1. *Sejam A um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $\omega \in \Omega^{k-1}(A)$. Dados $v_1, \ldots, v_k$ em $\mathbb{R}^n$ definimos as funções $h, g : A \to \mathbb{R}$, respectivamente, por*

$$\begin{aligned} h(x) &= d\omega(x)\big(v_1(x), \ldots, v_k(x)\big) \text{ e} \\ g_j(x) &= \omega(x)\big(v_1(x), \ldots, \widehat{v_j(x)}, \ldots, v_k(x)\big). \end{aligned}$$

Então

$$h(x) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} Dg_j(x)(v_j).$$

Demonstração: Siga os seguintes passos:

a. Seja $X = [v_1 \cdots v_k]$, matriz $n \times k$. Para cada $1 \leq j \leq k$ defina $Y_j = [v_1 \cdots \widehat{v}_j \cdots v_k]$, matriz $n \times k-1$. Dada a k-upla $I = (i, i_1, \ldots, i_k)$ mostre que

$$\det X(i, i_1, \ldots, i_k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} v_{ij} \det Y_j(i_1, \ldots, i_{k-1}).$$

b. Verifique a validade do teorema se $\omega = f\, dx_I$, ou seja, se $\omega = f\, dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$.
c. Conclua o resultado enunciado.

□

Exercício 16. Seja A um aberto de $\mathbb{R}^n$. Denote por $\mathscr{S}(A)$ o conjunto dos campos escalares sobre A e por $\mathscr{X}(A)$ o conjunto dos campos de vetores sobre A. Mostre que existem isomorfismos α_i e β_j entre espaços vetoriais como nos diagramas abaixo

$$\begin{tikzcd} \mathscr{S}(A) \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "\nabla"] & \Omega^0(A) \arrow[d, "d"] \\ \mathscr{X}(A) \arrow[r, "\alpha_1"] & \Omega^1(A) \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} \mathscr{X}(A) \arrow[r, "\beta_{n-1}"] \arrow[d, "\mathrm{div}"] & \Omega^{n-1}(A) \arrow[d, "d"] \\ \mathscr{S}(A) \arrow[r, "\beta_n"] & \Omega^n(A) \end{tikzcd}$$

tais que $d \circ \alpha_0 = \alpha_1 \circ \nabla$ e $d \circ \beta_{n-1} = \beta_n \circ \operatorname{div}$, onde ∇f é o campo gradiente de uma função $f : A \to \mathbb{R}$ dado por

$$\nabla f(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) e_i(p)$$

e $\operatorname{div} F$ é o divergente de um campo de vetores $F = (F_1, \ldots, F_n)$ em A dado por

$$\operatorname{div} F(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(p) = \operatorname{Tr} DF(p).$$

Exercício 17. Para cada campo de vetores $F = (F_1, F_2, F_3)$ em $\mathbb{R}^3$ defina as formas

$$\begin{aligned} \omega_F &= F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz, \\ \eta_F &= F_1\, dy \wedge dz + F_2\, dz \wedge dx + F_3\, dx \wedge dy \end{aligned}$$

a. Mostre que $df = \omega_{\nabla f}, d\omega_F = \eta_{\operatorname{rot} F}$ e $d\eta_F = \operatorname{div} F\, dx \wedge dy \wedge dz$.
b. Use as identidades acima para provar que $\operatorname{rot} \nabla f = 0$ e $\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$.

Exercício 18. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ uma função de classe C^∞. Mostre, através de cálculos diretos que

$$df_1 \wedge df_3 \wedge df_5 = \det M\, dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_5,$$

onde M é a matriz compostas das colunas 1, 3 e 5 da matriz de Df na base canônica.

Exercício 19. Sejam $\omega = xy\, dx + 2z\, dy - y\, dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(u, v) = (uv, u^2, 3u + v).$$

Calcule diretamente $d\omega, f^*(d\omega)$ e $d(f^*\omega)$.

Exercício 20. Demonstre o teorema abaixo.

Teorema 0.2 (Expressão para calcular $f^*\omega$)**.** *Sejam A um aberto de $\mathbb{R}^k$ e $f : A \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^∞, $x \in \mathbb{R}^k$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Se $I = (i_1, \ldots, i_l)$ é uma l-upla ascendente em $\{1, \ldots, n\}$*[1] *então*

$$f^*(dy_I) = \sum_{[J]} \left(\det \frac{\partial f_I}{\partial x_J} \right) dx_J,$$

onde $dz_I = dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_r}$, $f_I = (f_{i_1}, \ldots, f_{i_r})$ para toda r-upla ascendente $I = (i_1, \ldots, i_r)$ e $[J]$ é o conjunto de todas as l-uplas ascendentes do conjunto $\{1, \ldots, k\}$.

Exercício 21. Neste exercício obtemos condições necessárias e suficientes para que os isomorfismos lineares α_i e β_j definidos no exercício 16 tenham bom comportamento quando submetidas a ação de um difeomorfismo $f : A \to B$ entre abertos de R^n.

Sejam então $f : A \to B$ um difeomorfismo entre abertos de $\mathbb{R}^n$, $x \in A$ e $y \in B$. Ao campo de vetores em A dado por $F(x) = f(x)_x$ associamos o campo $G(y) = f_*\Big(F\big(f^{-1}(y)\big)\Big)$ em B.

a. Mostre que $f^*(\alpha_1 G) = alpha_1 F$ para todo campo de vetores F em A se e somente se a matriz de $Df(x)$ na base canônica é ortogonal para todo $x \in A$.

Dica. Mostre que $f^*(\alpha_1 G) = \alpha_1 F$ equivale a $Df(x)^t Df(x)\big(f(x)\big) = f(x)$.

b. Mostre que $f^*(\beta_{n-1} G) = \beta_{n-1} F$ para todo campo F se e somente se $\det Df(x) = 1$.

Dica. Mostre que $f^*(\beta_{n-1} G) = \beta_{n-1} F$ equivale a $f(x) = \det Df(x) f(x)$.

---

[1] isto é, $i_r \leq i_s$ sempre que $r \leq s$.

c. Para cada campo escalar h em A associamos o campo escalar $k = h \circ \alpha^{-1}$ em B. Mostre que $f_*(\beta_n k) = \beta_n h$ para toda h se e somente se $\det Df = 1$.

Exercício 22. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo. Suponha que toda forma fechada em U também é exata. Mostre que o mesmo vale em $f(U)$.

Dica. Pense em pull-backs.

Exercício 23. Seja $\theta : \mathbb{R}^2 \to]0, 2\pi[$ a segunda coordenada da inversa de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada no exercício 22 da lista 2. Mostre que

$$\int_{C_{r,n}} d\theta = 2\pi n,$$

onde $C_{r,n}$ é o 1-cubo singular dado por $C_{r,n} = (\cos 2\pi nt, \sin 2\pi nt)$.

Use o teorema de Stokes para 1-cadeias singulares para concluir que $C_{r,n}$ não pode ser o bordo de nenhuma 2 cadeia em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Exercício 24. Sejam c_1 e c_2 1-cubos singulares em $\mathbb{R}^2$ satisfazendo $c_1(0) = c_2(0)$ e $c_1(1) = c_2(1)$. Mostre que existe um um 2-cubo singular c tal que $\partial c = c_1 - c_2 + c_3 - c_4$ onde c_3 e c_4 são degenerados, ou seja, pontos em R^2. Conclua que

$$\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega$$

para toda 1-forma exata ω de $\mathbb{R}^2$. Dê um contra-exemplo em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ quando ω é fechada, mas não é exata.

Exercício 25. Mostre que Se ω é uma 1-forma num aberto de $\mathbb{R}^2$ e

$$\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega$$

para todos 1-cubos singulares com $c_1(0) = c_2(0)$ e $c_1(1) = c_2(1)$, então ω é exata.

Dica. Lembre-se da construção de uma função potencial para um campo de vetores em $\mathbb{R}^2$ feita em sala.

Exercício 26 (“Bônus” - Introdução às funções analíticas)**.** Uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é diferenciável em z_0 se

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Se f é diferenciável em todo ponto de um aberto $A \subset C$ e f' é continua em A então dizemos que f é *analítica* em A.

a. Mostre que $f(z) = z$ é analítica e $f(z) = \bar{z}$ não o é. Mostre que somas, produtos e quocientes de funçções analíticas também são analíticas.

b. Mostre que se $f(z) = u(z) + iv(z)$, onde para $z = x + iy$ temos $u(z) = u(x,y) = \Re f(z)$ e $v(z) = v(x,y) = \Im f(z)$, é analítica então $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$ (equações de Cauchy-Riemann). Vale a recíproca?

c. Seja $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma transformação $\mathbb{R}$-linear. Mostre que T corresponde a uma multiplicação por um número complexo se e somente se $a = d$ e $b = -c$, onde $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ é a matriz de T em relação à base $\{1, i\}$. Com isso considerando $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica como uma função diferenciável de R^2 em $\mathbb{R}^2$ temos que $Df(z_0)$ corresponde à multiplicação por um número complexo. Determine esse número.

d. Se $\omega, \eta, \mu, \lambda$ são formas diferenciais em um aberto de $\mathbb{R}^2$ definimos

$$d(\omega + i\eta) = dw + id\eta, \qquad \int_c \omega + i\eta = \int_c \omega + i\int_c \eta,$$
$$dz = dx + idy, \qquad (\omega + i\eta) \wedge (\mu + i\lambda) = (\omega \wedge \mu - \eta \wedge \lambda) + i(\eta \wedge \mu + \omega \wedge \lambda).$$

Mostre que $d(f\,dz) = 0$ se e somente se f satisfaz as equações de Cauchy-Riemann.

e. Se f é analítica em A então $\int_c f\,dz = 0$ para toda curva fechada tal que $c = \partial c'$ para alguma 2-cadeia c' em A.

f. Mostre que $dz/z = id\theta + dh$ para alguma função $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ e conclua que $\int_{C_{r,n}} (1/z)\,dz = 2\pi i n$.

g. Se f é analítica no disco unitário aberto, D, mostre que $f(z)/z$ o é em $D \setminus \{0\}$ e

$$\int_{C_{r_1,n}} \frac{f(z)}{z}\,dz = \int_{C_{r_2,n}} \frac{f(z)}{z}\,dz,$$

para $0 < r_1, r_2 < 1$.

Usando o item acima para calcular $\lim_{r\to 0} \int_{C_{r,n}} f(z)/z\,dz$ conclua o resultado abaixo.

Teorema 0.3 (Fórmula Integral de Cauchy)**.** *Sejam* $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $f : D \to \mathbb{C}$ *uma função analítica e* c *uma curva fechada em* $D \setminus \{0\}$ *então*

$$int_c \frac{f(z)}{z}\,dz = 2\pi i n f(0),$$

onde n *é o* winding number *da curva* c *em torno da origem.*

O winding number em torno da origem de uma curva fechada c com imagem em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ é o único inteiro n tal que $c - C_{1,n} = \partial c'$ para alguma 2-cadeia c'. (É necessário verificar a existência e unicidade de tal n).