MAT0326 — Geometria Diferencial I

Prova de Recuperação — 06/02/2013

Questão 1 (Valor: 2.0 pontos). Sejam β e γ duas curvas, parametrizadas pelo comprimento de arco s, tais que suas curvatura e torsão são positivas e $B_\beta(s) = B_\gamma(s)$ para todo s. Mostre que existe $p \in \mathbb{R}^3$ tal que, para todo s, temos $\gamma(s) = \beta(s) + p$.

Questão 2 (Valor: $2.0 = 1.5 + 0.5$ pontos). Seja S uma superfície regular tal que, para todo $p \in S$, dN_p é um múltiplo da identidade, ou seja, se $v \in T_pS$, então $dN_p(v) = k(p)v$.

a. Mostre que a função $k : S \to \mathbb{R}$ é constante.
b. Classifique, localmente, a superfície S.

Questão 3 (Valor: 2.0 pontos). Sejam S uma superfície regular, α uma curva assintótica em S e $p = \alpha(t_0) \in$ tal que $K(p) < 0$ e $\kappa(p) \neq 0$ Mostre que $|\tau(p)| = \sqrt{-K(p)}$.

Dica. Relacione o triedro de Frenet de α com a geometria da superfície e considere a matriz de $dN(p)$ numa base ortonormal apropriada.

Questão 4 (Valor: 2.0 pontos). Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco e de curvatura não nula em cada ponto. Considere a superfície S parametrizada por

$$X(s, v) = \alpha(s) + vb(s), s \in I, -\epsilon < v < \epsilon,$$

onde $b(s)$ é o vetor binormal de α no ponto $\alpha(s)$. Mostre que α é geodésica em S.

Questão 5 (Valor: $2.0 = 0.5 + 0.5 + 1.0$ pontos). Sejam S uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$, com campo normal unitário N e X, Y campos de vetores tangentes a S. Sejam ainda $\alpha : I \to \S$ uma curva diferenciável ao longo de S e $f : S \to \mathbb{R}$ um função diferenciável. Mostre que a derivada covariante satisfaz

a. $\nabla_{\alpha'}(X + Y) = \nabla_{\alpha'}X + \nabla_{\alpha'}Y$; **b.** $\nabla_{f\alpha'}X = f\nabla_{\alpha'}X$; **c.** $\nabla_{\alpha'}fX = Df(\alpha')X + f\nabla_{\alpha'}X$.

BOA PROVA!

MAT0326 — Geometria Diferencial I

Prova de Recuperação — 06/02/2013

Questão 1 (Valor: 2.0 pontos). Sejam β e γ duas curvas, parametrizadas pelo comprimento de arco s, tais que suas curvatura e torsão são positivas e $B_\beta(s) = B_\gamma(s)$ para todo s. Mostre que existe $p \in \mathbb{R}^3$ tal que, para todo s, temos $\gamma(s) = \beta(s) + p$.

Questão 2 (Valor: $2.0 = 1.5 + 0.5$ pontos). Seja S uma superfície regular tal que, para todo $p \in S$, dN_p é um múltiplo da identidade, ou seja, se $v \in T_pS$, então $dN_p(v) = k(p)v$.

a. Mostre que a função $k : S \to \mathbb{R}$ é constante.
b. Classifique, localmente, a superfície S.

Questão 3 (Valor: 2.0 pontos). Sejam S uma superfície regular, α uma curva assintótica em S e $p = \alpha(t_0) \in$ tal que $K(p) < 0$ e $\kappa(p) \neq 0$ Mostre que $|\tau(p)| = \sqrt{-K(p)}$.

Dica. Relacione o triedro de Frenet de α com a geometria da superfície e considere a matriz de $dN(p)$ numa base ortonormal apropriada.

Questão 4 (Valor: 2.0 pontos). Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco e de curvatura não nula em cada ponto. Considere a superfície S parametrizada por

$$X(s, v) = \alpha(s) + vb(s), s \in I, -\epsilon < v < \epsilon,$$

onde $b(s)$ é o vetor binormal de α no ponto $\alpha(s)$. Mostre que α é geodésica em S.

Questão 5 (Valor: $2.0 = 0.5 + 0.5 + 1.0$ pontos). Sejam S uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$, com campo normal unitário N e X, Y campos de vetores tangentes a S. Sejam ainda $\alpha : I \to \S$ uma curva diferenciável ao longo de S e $f : S \to \mathbb{R}$ um função diferenciável. Mostre que a derivada covariante satisfaz

a. $\nabla_{\alpha'}(X + Y) = \nabla_{\alpha'}X + \nabla_{\alpha'}Y$; **b.** $\nabla_{f\alpha'}X = f\nabla_{\alpha'}X$; **c.** $\nabla_{\alpha'}fX = Df(\alpha')X + f\nabla_{\alpha'}X$.

BOA PROVA!