MAT0326 — Geometria Diferencial I

Terceira Prova — 04/12/2012

Símbolos de Christoffel

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN \\ X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN \end{aligned}$$

Equações de Gauss

$$\begin{aligned} EK &= (\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2 \\ FK &= (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 \\ FK &= (\Gamma_{12}^2)_v - (\Gamma_{22}^2)_u + \Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^2 \\ GK &= (\Gamma_{22}^1)_u - (\Gamma_{12}^1)_v + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1 - (\Gamma_{12}^1)^2 \end{aligned}$$

Equações de Codazzi

$$\begin{aligned} e_v - f_u &= e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 \\ f_v - g_u &= e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2 \end{aligned}$$

Questão 1 (Valor: 1.0 pontos)**.** Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ uma parametrização de uma superfície regular S. Expresse os símbolos de Christoffel em termos das primeiras derivadas dos coeficientes da primeira forma fundamental dessa parametrização.

Questão 2 (Valor: $2.5 = 1.0 + 1.5$ pontos)**.**

a. Seja X uma parametrização ortogonal. Escreva a equação das geodésicas em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental e suas derivadas.

b. Determine todas as geodésicas do cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Questão 3 (Valor: 1.5 pontos)**.** Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização ortogonal ($F = 0$) tal que as curvas coordenadas são geodésicas. Mostre que a superfície é planar, ou seja, $K \equiv 0$.

Questão 4 (Valor: 2.5 pontos)**.** Sejam $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização conforme, isto é, seus coeficientes da primeira forma fundamental satisfazem $E = G = \lambda(u, v)$ e $F = 0$ e Δ o laplaciano em coordenadas cartesianas de $\mathbb{R}^2$, ou seja, $\Delta f(u, v) = f_{uu} + f_{vv}$. Mostre que a curvatura gaussiana dessa parametrização é dada por $K = -\dfrac{1}{2\lambda}\Delta(\ln \lambda)$.

Questão 5 (Valor: 2.5 pontos)**.** Mostre que um paralelo numa superfície de revolução é uma geodésica se e somente se o vetor tangente a cada meridiano que o intercepta é paralelo ao eixo de revolução.

Dica. Além da equação das geodésicas, explicite a primeira forma fundamental da superfície ao longo de um paralelo.

BOA PROVA!