MAT0326 — Geometria Diferencial I

Prova Substitutiva 3 — 13/12/2012

Questão 1 (Valor: $4.0 = 1.0 + 0.5 + 1.0 + 1.5$ pontos). Sejam S uma superfície regular com campo normal unitário N e α uma curva parametrizada por comprimento de arco com curvatura $\kappa(s)$ não nula com referencial de Frenet $\{t, n, b\}$.

a. Mostre que $t' = \langle \kappa n, N \wedge t \rangle N \wedge t + \langle \kappa n, N \rangle N$.

Dica. Use o referencial de Darboux adaptado à superfície $\{t, t \wedge N, N\}$.

b. Lembre-se que as curvatura geodésica, κ_g, e a curvatura normal, κ_n, de α são dadas por $\kappa_g = \langle \kappa n, N \wedge T \rangle$ e $\kappa_n = \langle \kappa n, N \rangle$. conclua que $\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$.

c. Mostre que $|\kappa_g| = |\nabla_{\alpha'} \alpha'|$ e conclua que α é geodésica em S se e somente se $\kappa_g = 0$.

d. Seja C a interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano que contém o eixo Ox e faz ângulo θ com o plano Oxy. Mostre que C é uma elipse e calcule $|\kappa_g|$ nos pontos de C sobre seus eixos.

Questão 2 (Valor: 2.0 pontos). Calcule a holonomia em torno de um paralelo $u = u_0$ da superfície parametrizada $X(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$.

Dica. Lembre-se que a holonomia está muito relacionada com a curvatura gaussiana da superfície.

Questão 3 (Valor: 4.0 pontos). Seja S uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$. Prove ou dê contra-exemplo:

a. Uma curva em S é geodésica e assintótica se e somente se é uma reta.

b. Se uma curva em S é geodésica e linha de curvatura então esta curva é plana.

BOA PROVA!

MAT0326 — Geometria Diferencial I

Prova Substitutiva 3 — 13/12/2012

Questão 1 (Valor: $4.0 = 1.0 + 0.5 + 1.0 + 1.5$ pontos). Sejam S uma superfície regular com campo normal unitário N e α uma curva parametrizada por comprimento de arco com curvatura $\kappa(s)$ não nula com referencial de Frenet $\{t, n, b\}$.

a. Mostre que $t' = \langle \kappa n, N \wedge t \rangle N \wedge t + \langle \kappa n, N \rangle N$.

Dica. Use o referencial de Darboux adaptado à superfície $\{t, t \wedge N, N\}$.

b. Lembre-se que as curvatura geodésica, κ_g, e a curvatura normal, κ_n, de α são dadas por $\kappa_g = \langle \kappa n, N \wedge T \rangle$ e $\kappa_n = \langle \kappa n, N \rangle$. conclua que $\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$.

c. Mostre que $|\kappa_g| = |\nabla_{\alpha'} \alpha'|$ e conclua que α é geodésica em S se e somente se $\kappa_g = 0$.

d. Seja C a interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano que contém o eixo Ox e faz ângulo θ com o plano Oxy. Mostre que C é uma elipse e calcule $|\kappa_g|$ nos pontos de C sobre seus eixos.

Questão 2 (Valor: 2.0 pontos). Calcule a holonomia em torno de um paralelo $u = u_0$ da superfície parametrizada $X(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$.

Dica. Lembre-se que a holonomia está muito relacionada com a curvatura gaussiana da superfície.

Questão 3 (Valor: 4.0 pontos). Seja S uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$. Prove ou dê contra-exemplo:

a. Uma curva em S é geodésica e assintótica se e somente se é uma reta.

b. Se uma curva em S é geodésica e linha de curvatura então esta curva é plana.

BOA PROVA!