MAT0326 — Geometria Diferencial I

Prova Substitutiva 2 — 11/12/2012

Questão 1 (Valor: $3.0 = 0.5 + 0.5 + 2.0$ pontos). Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco cuja curvatura nunca se anula. Seja $r > 0$ e considere a superfície parametrizada dada por

$$X(u,v) = \alpha(u) + r\big(n(u)\cos v + b(u)\sin v\big),$$

onde $n(u)$ e $b(u)$ são, respectivamente, os vetores normal e binormal de α em $\alpha(u)$.

a. Determine os pontos onde a superfície parametrizada é regular.
b. Determine um vetor normal unitário à superfície em seus pontos regulares.
c. Determine os coeficientes da primeira e da segunda formas fundamentais em termos da curvatura e da torção da curva α.

Questão 2 (Valor: 4.0 pontos). Seja $b > 0$ fixado. Considere a porção do helicóide parametrizado por

$$X(u,v) = (u\cos v, u\sin v, bv), \quad u \in \mathbb{R}^+, v \in \mathbb{R}.$$

a. Determine os coeficientes da primeira e da segunda formas fundamentais desta parametrização.
b. Calcule as curvaturas gaussiana e média do helicóide e, a partir delas, determine as curvaturas principais.
c. Determine as curvas assintóticas do helicóide, explicitando-as e descrevendo-as geometricamente.
d. Determine as linhas de curvatura do helicóide.

Além disso, se você provar que em cada ponto $p = X(u_0, v_0)$ do helicóide a seção normal tangente à hélice $X(u_0, v)$ tem uma inflexão em p, então ganha mais 1.0 ponto.

Questão 3 (Valor: 3.0 pontos). Seja S uma superfície parametrizada regular. Prove ou dê contra-exemplo:

a. Se uma curva em S é simultaneamente linha de curvatura e curva assintótica, então esta curva é plana.

Dica. Qual a relação entre o triedro de Frenet de uma curva assintótica e o vetor normal a S? (Pense obviamente numa curva que não é uma reta.)

b. Se uma curva é plana e assintótica, então ela é uma reta.

BOA PROVA!

MAT0326 — Geometria Diferencial I

Prova Substitutiva 2 — 11/12/2012

Questão 1 (Valor: $3.0 = 0.5 + 0.5 + 2.0$ pontos). Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco cuja curvatura nunca se anula. Seja $r > 0$ e considere a superfície parametrizada dada por

$$X(u,v) = \alpha(u) + r\big(n(u)\cos v + b(u)\sin v\big),$$

onde $n(u)$ e $b(u)$ são, respectivamente, os vetores normal e binormal de α em $\alpha(u)$.

a. Determine os pontos onde a superfície parametrizada é regular.
b. Determine um vetor normal unitário à superfície em seus pontos regulares.
c. Determine os coeficientes da primeira e da segunda formas fundamentais em termos da curvatura e da torção da curva α.

Questão 2 (Valor: 4.0 pontos). Seja $b > 0$ fixado. Considere a porção do helicóide parametrizado por

$$X(u,v) = (u\cos v, u\sin v, bv), \quad u \in \mathbb{R}^+, v \in \mathbb{R}.$$

a. Determine os coeficientes da primeira e da segunda formas fundamentais desta parametrização.
b. Calcule as curvaturas gaussiana e média do helicóide e, a partir delas, determine as curvaturas principais.
c. Determine as curvas assintóticas do helicóide, explicitando-as e descrevendo-as geometricamente.
d. Determine as linhas de curvatura do helicóide.

Além disso, se você provar que em cada ponto $p = X(u_0, v_0)$ do helicóide a seção normal tangente à hélice $X(u_0, v)$ tem uma inflexão em p, então ganha mais 1.0 ponto.

Questão 3 (Valor: 3.0 pontos). Seja S uma superfície parametrizada regular. Prove ou dê contra-exemplo:

a. Se uma curva em S é simultaneamente linha de curvatura e curva assintótica, então esta curva é plana.

Dica. Qual a relação entre o triedro de Frenet de uma curva assintótica e o vetor normal a S? (Pense obviamente numa curva que não é uma reta.)

b. Se uma curva é plana e assintótica, então ela é uma reta.

BOA PROVA!