MAT0326 — Geometria Diferencial I

Segunda Prova — 06/11/2012 — Soluções

Questão 1 (Valor: 3.0 pontos)**.** Considere a superfície S, de Enneper, parametrizada por

$$X(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2v, u^2 - v^2\right).$$

a. Determine os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamentais de S.
b. Determine as curvaturas gaussiana e média de S.
c. Determine as linhas de curvatura e curvas assintóticas de S.

Solução. **a.** Dada a parametrização de S do enunciado, temos que

$$X_u = (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u), \quad \text{e} \quad X_v = (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v).$$

Portanto os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = (1 + u^2 + v^2)^2 \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0 \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = (1 + u^2 + v^2)^2 \end{aligned}$$

Lembrando que $\|X_u \wedge X_v\|^2 = EG - F^2 = (1 + u^2 + v^2)^4$, temos que o vetor normal unitário à superfície S é dado por

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} = \frac{1}{(1 + u^2 + v^2)^2}(-2uv^2 - 2u - 2u^3, 2u^2v + 2v + 2v^3, 1 - 2u^2v^2 - u^4 - v^4).$$

As segundas derivadas da parametrização são

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (-2u, 2v, 2) \\ X_{uv} &= (2v, 2u, 0) \\ X_{vv} &= (2u, -2v, -2) \end{aligned}$$

Deste modo, os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$\begin{aligned} e &= \langle X_{uu}, N \rangle = 2 \\ f &= \langle X_{uv}, N \rangle = 0 \\ g &= \langle X_{vv}, N \rangle = -2 \end{aligned}$$

b. Com os resultados do item anterior, temos as curvaturas gaussiana e média de S dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-4}{(1 + u^2 + v^2)^4} \\ H &= \frac{1}{2}\left(\frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2}\right) = 0. \end{aligned}$$

c. As linhas de curvatura de uma superfície satisfazem à seguinte equação diferencial

$$\det \begin{bmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{bmatrix} = 0.$$

Neste caso a equação fica $4(1 + u^2 + v^2)^2 u'v' = 0$, que é satisfeita se e somente se $u' = 0$ ou $v' = 0$, ou seja, as linhas de curvatura são as curvas coordenadas da parametrização dada.

As curvas assintóticas de uma superfícies satisfazem à equação diferencial

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0,$$

que, neste caso reduz-se a $(u')^2 - (v')^2 = 0$, isto é $u' = \pm v'$. Isto diz o vetor tangente a uma curva assintótica no ponto $p \in S$ bissecta os vetores X_u e X_v em TpS, os quais são ortogonais (pois são tangentes às linhas de curvatura).

□

Questão 2 (Valor: 2.0 pontos). Sejam S uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$ e $p \in S$. Mostre que a curvatura média de S em p é dada por

$$H(p) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \kappa_n(\theta)\, d\theta,$$

onde $\kappa_n(\theta)$ é a curvatura normal de S em p numa direção que faz ângulo θ com uma direção principal em T_pS.

Solução. A fórmula de Euler nos diz que

$$\kappa_n(\theta) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \kappa_n(\theta)\, d\theta &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\left[k_1(p)\int_0^\pi \cos^2\theta\, d\theta + k_2(p)\int_0^\pi \sin^2\theta\, d\theta\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[k_1(p)\frac{\pi}{2} + k_2(p)\frac{\pi}{2}\right] \\
&= \frac{k_1(p)+k_2(p)}{2} = H(p)
\end{aligned}$$

□

Questão 3 (Valor: 2.0 pontos)**.** Sejam $\mathbb{S}^2$ a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$, $N = (0,0,1)$ e $S = (0,0,-1)$. Considere a projeção de $\tilde{S} = \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$ sobre o cilindro $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$, $f : \tilde{S} \to C$, onde cada $p = (x,y,z) \in \tilde{S}$ é levado em $f(p) \in C$, que é a interseção da semi-reta de extremo $(0,0,z)$ que passa por p com o cilindro C.

a. Escreva uma expressão para $f : \tilde{S} \to C$ em coordenadas cartesianas do $\mathbb{R}^3$. Conclua que f é diferenciável.

b. Mostre que esta aplicação preserva áreas, isto é, se A é a área de uma região R em $\tilde{S}$ então a área de $f(R)$ também é A.

c. Mostre que f não preserva comprimento de curvas nem ângulo entre curvas.

Solução. **a.** De acordo com a descrição geométrica de f dada no enunciado, para cada $(x,y,z) \in \tilde{S}$, temos que $f(x,y,z) = (u,v,w) = (x,y,z) + \lambda(x,y,0)$, onde devemos determinar $\lambda \in \mathbb{R}^+$ de modo que $u^2 + v^2 = 1$. Assim,

$$u^2 + v^2 = 1 \Rightarrow (x + \lambda x)^2 + (y + \lambda y)^2 = 1 \Rightarrow (1+\lambda)^2 = \frac{1}{x^2+y^2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1,$$

já que $(x,y,z) \in \tilde{S}$ acarreta $x^2 + y^2 < 1$, donde $\lambda > 0$, como queríamos.

A expressão para f é então

$$f(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z \right),$$

que é um função diferenciável em $\mathbb{R}^3$, exceto sobre o eixo $0z$, e portanto diferenciável sobre $\tilde{S}$.

b. Se R é uma região em $\tilde{S}$ contida na imagem da parametrização $X(u,v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$, digamos $R = X(B)$, então sua área é dada por

$$A(R) = \iint_B \|X_u \wedge X_v\| \, dudv = \iint_B |\sin v| \, dudv.$$

A área da região correspondente em C, $f(R)$ é

$$A\big(f(R)\big) = \iint_B \|(f \circ X)_u \wedge (f \circ X)_v\| \, dudv = \iint_B |\sin v| \, dudv = A(R),$$

pois $(f \circ X)(u,v) = (\cos u, \sin u, \cos v)$.

c. Para ver que f não preserva comprimentos, considere um trecho de um meridiano da esfera, digamos $X(u_0, v)$, $\theta_0 \le v \le \frac{\pi}{2}$, com $\theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ fixado. O comprimento desta curva é claramente $L = \frac{\pi}{2} - \theta_0$ e sua imagem, uma reta vertical no cilindro C tem comprimento $\cos(\theta_0) < L$.

Mais geralmente você pode calcular o comprimento de uma curva $\alpha : I \to \tilde{S}$ lembrando que podemos escrever $\alpha(t) = X\big(u(t), v(t)\big)$, onde $\beta(t) = \big(u(t), v(t)\big)$ é uma curva regular no plano, donde

$$\alpha'(t) = u'(t) X_u\big(u(t), v(t)\big) + v'(t) X_v\big(u(t), v(t)\big),$$

e portanto

$$|\alpha'(t)|^2 = E\big(u(t), v(t)\big)(u')^2(t) + 2F\big(u(t), v(t)\big)u'(t)v'(t) + G\big(u(t), v(t)\big)(v')^2(t) = \sin^2\big(v(t)\big)(u')^2(t) + (v')^2(t).$$

O vetor tangente à imagem de α pela função f, $\gamma(t) = f \circ \alpha(t)$ é

$$\gamma'(t) = df_{\alpha(t)}\big(\alpha'(t)\big) = u' df_{\alpha(t)}(X_u) + v' df_{\alpha(t)}(X_v).$$

Explicite os comprimentos das curvas α e γ.

Com relação à medida de ângulos, devemos considerar duas curvas α_1 e α_2 em $\tilde{S}$ que passam por um ponto $p = \alpha_1(t) = \alpha_2(t) \in \tilde{S}$ e medimos o ângulo entre os vetores $\alpha_1'(t)$ e $\alpha_2'(t)$ e comparamos com a medida do ângulo entre os vetores $df_p(\alpha_1')$ e $df_p(\alpha_2')$, ambos vetores tangentes ao cilindro no ponto $T_{f(p)}C$.

Questão 4 (Valor: 2.0 pontos)**.** Sejam S e $\tilde{S}$ superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$ que se interceptam ao longo de uma curva regular C. Suponha que C é uma linha de curvatura de S. Mostre que C é linha de curvatura de $\tilde{S}$ se e somente se o ângulo entre as superfícies S e $\tilde{S}$ é constante ao longo de C.

Solução. Sejam N e $\tilde{N}$ os vetores normais unitários a S e $\tilde{S}$, respectivamente, e suponha que C é linha de curvatura tanto em S quanto em $\tilde{S}$, com parametrização $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$. Então existem funções $\lambda : S \to \mathbb{R}$ e $\mu : \tilde{S} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(N \circ \alpha)(t) &= dN_{\alpha(t)}\big(\alpha'(t)\big) = \lambda\big(\alpha(t)\big)\alpha'(t) \\ \frac{d}{dt}(\tilde{N} \circ \alpha)(t) &= d\tilde{N}_{\alpha(t)}\big(\alpha'(t)\big) = \mu\big(\alpha(t)\big)\alpha'(t) \end{aligned}$$

Derivando $\langle N \circ \alpha, \tilde{N} \circ \alpha \rangle$ temos

$$\begin{aligned} \langle N \circ \alpha, \tilde{N} \circ \alpha \rangle' &= \langle (N \circ \alpha)', \tilde{N} \circ \alpha \rangle + \langle N \circ \alpha, (\tilde{N} \circ \alpha)' \rangle \\ &= \langle dN(\alpha'), \tilde{N} \circ \alpha \rangle + \langle N \circ \alpha, d\tilde{N}(\alpha') \rangle \\ &= \langle \lambda\alpha', \tilde{N} \circ \alpha \rangle + \langle N \circ \alpha, \mu\alpha' \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}S \cap T_{\alpha(t)}\tilde{S}$. Portanto $\langle N, \tilde{N} \rangle$, que determina o ângulo entre as superfícies, é constante ao longo da curva C.

Reciprocamente, suponha que as superfícies fazem ângulo constante ao longo da curva C, que é suposta é linha de curvatura de S. Ou seja, se κ_i, $i \in \{1, 2\}$ são as curvaturas principais de S, temos

$$\langle N \circ \alpha, \tilde{N} \circ \alpha \rangle = \text{cte.} \quad \text{e} \quad dN_{\alpha(t)}\big(\alpha'(t)\big) = \kappa_i\big(\alpha(t)\big)\alpha'(t), \text{ para } i = 1 \text{ ou } i = 2.$$

Derivando a primeira igualdade acima e usando a segunda, temos que

$$\langle d\tilde{N}(\alpha'), N \circ \alpha \rangle = -\langle \tilde{N} \circ \alpha, dN(\alpha') \rangle = -\langle \tilde{N} \circ \alpha, \kappa_i\alpha' \rangle = 0,$$

pois $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}\tilde{S}$. Com isso temos que $d\tilde{N}(\alpha') \in T_{\alpha(t)}S$ e já sabemos que $d\tilde{N}(\alpha') \in T_{\alpha(t)}\tilde{S}$. Segue-se então que $d\tilde{N}(\alpha') \in W = T_{\alpha(t)}S \cap T_{\alpha(t)}\tilde{S}$ e, como α é curva regular, temos $\dim W = 1$ com $W = [\alpha']$, portanto

$$d\tilde{N}_{\alpha(t)}(\alpha') = \lambda(t)\alpha'(t),$$

o que mostra que α é linha de curvatura de $\tilde{S}$. $\square$

Questão 5 (Valor: $3.0 = 0.5 + 1.5 + 1.0$ pontos)**.** Seja S uma superfície de revolução cuja curva geratriz é da forma $\alpha(u) = (0, h(u), u)$, $u \in I$ e $h(u) > 0$.

a. Mostre que S pode ser parametrizada por $X(u, v) = \big(h(u)\sin v, h(u)\cos v, u\big)$.

b. Mostre que se S tem curvatura média identicamente nula então $h''(u)h(u) = 1 + \big(h'(u)\big)^2$.

c. Determine todas as soluções da equação diferencial acima.

Dica. Você pode tentar a mudança de variáveis $z = \ln h$ ou fazer $w = h'$.

Solução. **a.** Para mostrar que a aplicação proposta é uma parametrização, basta repetir o argumento que fizemos em sala no caso geral de superfícies de revolução.

b. A fim de obter uma expressão para a curvatura média H da superfície S precisamos de seus coeficientes das primeira e segunda formas fundamentais. Para tanto,

$$X_u = \big(h'(u)\sin v, h'(u)\cos v, 1\big), \quad \text{e} \quad X_v = \big(h(u)\cos v, -h(u)\sin v, 0\big).$$

Portanto os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u\rangle = 1 + \big(h'(u)\big)^2 \\ F &= \langle X_u, X_v\rangle = 0 \\ G &= \langle X_v, X_v\rangle = h^2(u) \end{aligned}$$

Lembrando que $\|X_u \wedge X_v\|^2 = EG - F^2 = h(u)^2\big[1 + \big(h'(u)\big)^2\big]$, temos que o vetor normal unitário à superfície S é dado por

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \big(h'(u)\big)^2}}\big(\sin v, \cos v, -h'(u)\big).$$

As segundas derivadas da parametrização são

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \big(h''(u)\sin v, h''(u)\cos v, 0\big) \\ X_{uv} &= \big(h'(u)\cos v, -h'(u)\sin v, 0\big) \\ X_{vv} &= \big(-h(u)\sin v, -h(u)\cos v, 0\big) \end{aligned}$$

Deste modo, os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$\begin{aligned} e &= \langle X_{uu}, N\rangle = \frac{h''(u)}{\sqrt{1 + \big(h'(u)\big)^2}} \\ f &= \langle X_{uv}, N\rangle = 0 \\ g &= \langle X_{vv}, N\rangle = \frac{-h(u)}{\sqrt{1 + \big(h'(u)\big)^2}} \end{aligned}$$

Assim, a curvatura média de S é dada por

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{h''(u)h^2(u) - h(u)\big[1 + \big(h'(u)\big)^2\big]}{2h^2(u)\big[1 + \big(h'(u)\big)^2\big]^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Logo, $H \equiv 0$ se e somente se $h''(u)h(u) = 1 + \big(h'(u)\big)^2$.

c. Para resolver a equação acima, podemos escrevê-la na forma

$$\frac{2h''h'}{1 + (h')^2} = \frac{2h'}{h}.$$

Fazendo $1 + (h')^2 = z$ temos $z' = 2h''h'$ e a equação fica

$$\frac{z'}{z} = \frac{2h'}{h},$$

que, integrado, dá $z = (c_1 h)^2$, com c_1 uma constante. Em termos somente de h, isto equivale a $\dfrac{c_1 dh}{\sqrt{(c_1 h)^2 - 1}} = c_1 du$, donde $\cosh^{-1}(c_1 h) = c_1 u + c_2$, ou seja,

$$h(u) = \frac{1}{c_1}\cosh(c_1 u + c_2).$$

Isto mostra que as únicas superfícies de rotação regulares mínimas são obtidas pela rotação de catenárias. Tais superfícies são chamadas de *catenóides*.

□

Questão 6 (Valor: $3.0 = 1.0 + 2.0$ pontos)**.** Seja S um superfície regular. Mostre que

a. as direções principais num ponto hiperbólico de S bissectam as direções assintóticas.

b. se, em cada T_pS, as direções assintóticas são ortogonais então S tem curvatura média identicamente nula e que vale a recíproca se S não tem pontos planares.

Solução. Para os dois itens precisaremos da Fórmula de Euler para a curvatura normal:

$$\kappa_n(\theta) = \kappa_1 \cos^2(\theta) + \kappa_2 \sin^2(\theta),$$

onde κ_1 e κ_2 são as curvaturas principais de S num ponto p e θ é o ângulo que vetor na direção do qual calculamos a curvatura normal faz com a primeira direção principal (associada a κ_1).

a. Se $p \in S$ é hiperbólico, então $\kappa_1(p)\kappa_2(p) < 0$ e portanto existe $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tal que $\kappa_n(\theta_0) = 0$. Escrevendo a fórmula de Euler para $-\theta_0$ temos que

$$\kappa_n(-\theta_0) = \kappa_1 \cos^2(-\theta_0) + \kappa_2 \sin^2(-\theta_0) = \kappa_n(\theta_0) = 0,$$

ou seja, se θ_0 é direção assintótica em T_pS, então $-\theta_0$ também o é, donde a primeira direção principal bissecta as duas direções assintóticas em T_pS. Repetindo o argumento para $\theta_0 + \pi$ concluimos que a segunda direção principal também bissecta as direções assintóticas.

b. Suponha que uma das direções assintóticas faz ângulo θ_0 com a primeira direção principal. Se as direções assintóticas são ortogonais, então, pela fórmula de Euler, temos que

$$\begin{cases} \kappa_1 \cos^2(\theta_0) & + & \kappa_2 \sin^2(\theta_0) & = & 0 \\ \kappa_1 \cos^2\left(\theta_0 + \frac{\pi}{2}\right) & + & \kappa_2 \sin^2\left(\theta_0 + \frac{\pi}{2}\right) & = & 0 \end{cases}$$

que equivale a

$$\begin{cases} \kappa_1 \cos^2(\theta_0) & + & \kappa_2 \sin^2(\theta_0) & = & 0 \\ \kappa_1 \sin^2(\theta_0) & + & \kappa_2 \cos^2(\theta_0) & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \kappa_1 + \kappa_2 = 0 \Rightarrow H = 0.$$

Reciprocamente, se $H = 0$ e p é não planar, então $\kappa_2 = -\kappa_1$ e $\kappa_1\kappa_2 < 0$. Logo existe $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, tal que $\kappa_n(\theta_0) = 0$. Da fórmula de Euler vem que

$$0 = \kappa_n(\theta_0) = \kappa_1 \cos^2(\theta_0) - \kappa_1 \sin^2(\theta_0),$$

ou seja, $\tan(\theta_0) = \pm 1$, o que dá $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ ou $\theta_0 = \frac{3\pi}{4}$.

Como as direções principais bissectam as direções assintóticas num ponto hiperbólico (conforme item anterior) temos aqui que as direções assintóticas são ortogonais.

□