MAT0326 — Geometria Diferencial I

Prova Substitutiva 1 — 06/12/2012

Questão 1 (Valor: 2.0 pontos). Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Mostre que a curvatura da curva $y = f(x)$ é $\kappa = \dfrac{f''}{\left(1+(f')^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Questão 2 (Valor: 3.0 pontos). Seja $\beta : (-1,1) \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\beta(s) = \left(\frac{(1+s)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{(1-s)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right).$$

a. Mostre que β está parametrizada por comprimento de arco.

b. Mostre que a curvatura de β é $\kappa = \dfrac{1}{\sqrt{8(1-s^2)}}$.

c. Calcule os vetores normal e binormal de β.

d. Conclua que $\kappa = \tau$.

Questão 3 (Valor: $5.0 = 2.0 + 1.0 + 2.0$ pontos). Lembramos que uma curva é uma *hélice generalizada* se tem curvatura não nula e seu vetor tangente faz ângulo constante com uma direção fixada em $\mathbb{R}^3$.

a. Mostre que α é uma hélice generalizada se e somente se $\dfrac{\kappa}{\tau}$ é constante.

b. Mostre que se κ e τ são constantes não nulas então a curva é uma hélice circular reta.

Dica. Comece resolvendo o sistema de Frenet pelo vetor normal.

c. Mostre que uma curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizada por comprimento de arco é uma hélice se e somente se $\langle \alpha'', \alpha''' \wedge \alpha^{(4)} \rangle = 0$.

BOA PROVA!