MAT0326 — Geometria Diferencial I

Primeira Prova — 11/09/2012 — Soluções

Questão 1 (Valor: $2.0 = 0.5 + 1.5$ pontos)**.**

a. Mostre que $\cos\big(\arctan(x)\big) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

b. Determine uma curva plana $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, parametrizada por comprimento de arco, tal que $\kappa_\alpha(s) = \dfrac{1}{1+s^2}$ e $\alpha(0) = (0,0)$.

Solução. **a.** Como $\arctan(x) \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$ temos que $\sec\big(\arctan(x)\big) > 0$ e então

$$\cos\big(\arctan(x)\big) = \frac{1}{\sec\big(\arctan(x)\big)} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\big(\arctan(x)\big)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

b. Lembremos que se $\kappa(s) > 0, s \in I$ é uma função dada então toda curva parametrizada por comprimento de arco, $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, que tem $\kappa(s)$ como curvatura é dada[1] por

$$\alpha(s) = \left(a + \int_0^s \cos\theta(t)\,dt, b + \int_0^s \sin\theta(t)\,dt\right),$$

onde $\theta(t) = \int_0^t \kappa(s)\,ds + \phi$. As constantes a, b e ϕ determinam a "posição" da curva no plano.

Podemos escolher $\phi = 0$ e então

$$\theta(t) = \int_0^t \kappa(s)\,ds = \arctan(t).$$

Assim,

$$\alpha(s) = \left(a + \int_0^s \cos\big(\arctan(t)\big)\,dt, b + \int_0^s \sin\big(\arctan(t)\big)\,dt\right).$$

Do item anterior temos que $\cos\big(\arctan(t)\big) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ e disto concluímos que $\sin\big(\arctan(t)\big) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$. Logo

$$\alpha(s) = \left(a + \int_0^s \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt, b + \int_0^s \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt\right) = \left(a + \ln(s+\sqrt{1+s^2}), b + \sqrt{1+s^2}\right).$$

Como $\alpha(0) = (0,0)$, devemos ter $a = 0$ e $b = -1$.

[1] Os extremos de integração levam em conta o fato de que $0 \in I$

Questão 2 (Valor: $2.0 = 0.5 + 1.5$ pontos)**.** Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Podemos definir seu triedro de Frenet, sua curvatura e sua torsão em termos da reparamentrização de α pelo seu comprimento de arco como se segue. Sejam $s(t)$ o comprimento de arco de $\alpha(t)$ e $\beta(s) = \alpha\big(t(s)\big)$ a reparamentrização de α por comprimento de arco. *Definimos* então que

$$T_\alpha(t) = T_\beta(s), \quad N_\alpha(t) = N_\beta(s), \quad B_\alpha(t) = B_\beta(s) \quad e \quad \kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta(s), \quad \tau_\alpha(t) = \tau_\beta(s).$$

Seja $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ a curva dada por $\alpha(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$.

a. Mostre que α é regular e calcule seu comprimento de arco.

b. Determine os vetores tangente, normal e binormal de α, bem como sua curvatura e torsão.

Solução. **a.** Temos que $\alpha'(t) = (\sinh t, \cosh t, 1)$ e portanto, para todo $t \in \mathbb{R}$, $|\alpha'(t)| \geq 1$. Logo α é uma curva regular.

Calculando explicitamente temos $|\alpha'(t)| = \sqrt{2}\cosh(t)$, donde

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(t)|\,dt = \int_0^t \sqrt{2}\cosh(t)\,dt = \sqrt{2}\sinh(t).$$

b. Qualquer que seja a parametrização da curva temos

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tanh t, 1, \operatorname{sech} t).$$

Lembrando que a curvatura de uma curva regular é $\kappa(t) = \dfrac{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}$ e $\alpha''(t) = (\cosh t, \sinh t, 0)$ temos

$$\kappa(t) = \frac{\big|(-\sinh t, \cosh t, -1)\big|}{2\sqrt{2}\cosh^3 t} = \frac{1}{2\cosh^2 t}.$$

De $B = T \wedge N$ e das equações de Frenet segue-se que

$$\begin{aligned}
T' = \kappa N \quad &\Rightarrow \quad N(t) = (\operatorname{sech} t, 0, -\tanh t)\\
B = T \wedge N \quad &\Rightarrow \quad B(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\tanh t, 1, -\operatorname{sech} t) \quad \text{e} \quad B'(t) = \frac{\operatorname{sech} t}{\sqrt{2}}(-\operatorname{sech} t, 0, \tanh t)\\
B' = \tau N \quad &\Rightarrow \quad \tau(t) = \langle B', N\rangle = \frac{1}{2\cosh^2 t}.
\end{aligned}$$

Questão 3 (Valor: $2.0 = 1.5 + 0.5$ pontos)**.** Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular cujas curvatura e torsão nunca se anulam e sejam T, N e B seus vetores tangente, normal e binormal, respectivamente.

a. Mostre que $\dfrac{\langle N \wedge N', N'' \rangle}{|N'|^2} = \dfrac{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2 + 1}$, onde κ e τ são a curvatura e a torsão de α, respectivamente.

b. Conclua que α é uma hélice se e somente se o conjunto $\{N, N', N''\}$ é linearmente dependente.

Solução. **a.** Das equações de Frenet temos

$$N \wedge N' = N \wedge (-\kappa T - \tau B) = \kappa B - \tau T. \tag{0.1}$$

Derivando N' obtemos

$$N'' = (-\kappa T - \tau B)' = -(\kappa' T + \kappa T' + \tau' B + \tau B') = -kappa' T - (\kappa^2 + \tau^2) N - \tau' B. \tag{0.2}$$

De (0.1) e (0.2) e de $\{T, N, B\}$ ser base ortonormal segue-se que $\langle N \wedge N', N'' \rangle = -\kappa\tau' + \kappa'\tau$. Além disso temos que $|N'|^2 = \kappa^2 + \tau^2$. Logo,

$$\frac{\langle N \wedge N', N'' \rangle}{|N'|^2} = \frac{-\kappa\tau' + \kappa'\tau}{\kappa^2 + \tau^2} = \frac{\frac{-\kappa\tau' + \kappa'\tau}{\tau^2}}{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2 + 1} = \frac{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2 + 1}.$$

b. Uma curva é uma hélice se e somente se $\dfrac{\kappa}{\tau}$ é contante. Segue-se do item anterior que isso ocorre se e somente se $\langle N \wedge N', N'' \rangle = 0$, ou seja se e somente se os vetores N, N' e N'' são linearmente dependentes.

Questão 4 (Valor: $3.0 = 1.0 + 2.0$ pontos)**.** Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular cujas curvatura e torsão nunca se anulam.

a. Suponha que a imagem de α está contida numa esfera centrada na origem. Mostre que

$$\frac{\tau}{\kappa} + \left(\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right)' = 0. \tag{0.3}$$

Dica. Escreva $\alpha = \zeta T + \eta N + \theta B$.

b. Mostre agora que se (0.3) é satisfeita pelas curvatura e torsão de uma curva α então a imagem de α está contida em alguma esfera.

Dica. Usando os valores de ζ, η e θ obtidos acima, mostre que a curva $\alpha - (\zeta T + \eta N + \theta B)$ é constante e portanto um fortíssimo candidato a centro da esfera procurada.

Solução. **a.** Podemos supor incialmente que α está paramentrizada por comprimento de arco e como, por hipótese, a curva tem seu traço contido numa esfera centrada na origem temos que $|\alpha(t)| = r$, donde $\langle \alpha, \alpha' \rangle = 0$.

Como o triedro de Frenet em cada $t \in I$ é uma base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ podemos escrever

$$\alpha(t) = \zeta(t)T(t) + \eta(t)N(t) + \theta(t)B(t).$$

Omitindo t, derivando e usando as equações de Frenet temos

$$\alpha' = \zeta' T + \zeta T' + \eta' N + \eta N + \theta' B + \theta B' = (\zeta' - \eta\kappa)T + (\zeta\kappa + \eta' + \theta\tau)N + (-\eta\tau + theta')B. \tag{0.4}$$

Como $\langle \alpha, \alpha' \rangle = 0$ temos que $\alpha(t) \in \big[N(t), B(t)\big]$, donde $\zeta \equiv 0$. Além disso, $\langle \alpha', N \rangle = \langle \alpha', B \rangle = 0$ e portanto as coordenadas em (0.4) satisfazem

$$\begin{aligned} \eta' + \theta\tau &= 0 \\ -\eta\tau + \theta' &= 0 \\ -\eta\kappa &= 1, \end{aligned}$$

onde a última equação segue do fato que $\alpha' = T$, pois α é parametrizada por comprimento de arco. Assim temos que $\eta = \dfrac{-1}{\kappa}$ e $\theta = -\dfrac{\eta'}{\tau} = (\dfrac{1}{\kappa})'\dfrac{1}{\tau}$. Isto substituído na segunda equaçao do sistema acima dá

$$\frac{\tau}{\kappa} + \left(\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right)' = 0.$$

b. Reciprocamente, considere a curva $\beta = \alpha + \dfrac{1}{\kappa}N - \left(\dfrac{1}{\tau}(\dfrac{1}{\kappa})'\right)' B$, onde κ e τ são as curvatura e torsão de α, enquanto N e B são os vetores normal e binormal de α. Cálculo diretos usando o triedro de Frenet mostram que

$$\beta' = \alpha' - T + \left((\frac{1}{\kappa})' - (\frac{1}{\kappa})'\right) N - \left(\frac{\tau}{\kappa} + \left(\frac{1}{\tau}(\frac{1}{\kappa})'\right)'\right) B = 0.$$

Isto mostra que, para todo $t \in I$, $\beta(t) = P \in \mathbb{R}^3$ é ponto. Finalmente

$$|\alpha' - P|^2 = \left|\frac{1}{\kappa}N - \left(\frac{1}{\tau}(\frac{1}{\kappa})'\right)' B\right|^2 = \frac{1}{\kappa^2} + \left[(\frac{1}{\kappa})'\right]^2 \frac{1}{\tau^2} = R^2,$$

uma constante. Segue-se então que o traço de α está contido na esfera de centro P e raio R.

Questão 5 (Valor: 3.0 pontos)**.** Seja $S^2(1)$ a esfera unitária centrada na origem de $\mathbb{R}^3$ e sejam α e β curvas regulares dadas pela interseção de $S^2(1)$ com $x = y$ e de $S^2(1)$ com $y = \frac{1}{2}$, respectivamente.

a. Parametrize as curvas α e β.

b. Calcule o comprimento do arco ligando os pontos $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ tanto pela curva α quanto por β.

c. Determine o ângulo que os vetores normais de α e β fazem com o vetor normal a $S^2(1)$.

Solução. **a.** A curva α é dada pela interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $y = z$. Disto temos que $2x^2 + z^2 = 1$ e portanto $x(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cos t$ e $z(t) = \sin t$. Logo,

$$\alpha(t) = \left(\frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \sin t\right), t \in [0, 2\pi].$$

A curva β é dada pela interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $y = \frac{1}{2}$, ou seja, $x^2 + z^2 = \frac{3}{4}$ e portanto $x(t) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cos t$ e $z(t) = \sqrt{3}2 \sin t$. Logo,

$$\beta(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos t, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t\right), t \in [0, 2\pi].$$

b. A curva α é um círculo de centro $(0, 0, 0)$ e raio 1, logo o seu comprimento de arco entre os pontos $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, que produzem um arco de ângulo $\frac{\pi}{2}$, é $\frac{\pi}{2}$.

Analogamente, a curva β é um círculo de centro $(0, \frac{1}{2}, 0)$ e raio $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Logo o comprimento de arco de β entre os pontos $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ é $\frac{\sqrt{3}}{2} \arccos -\frac{1}{3}$, pois o ângulo entre os segmentos que ligam os pontos dados ao centro de β é $\arccos -\frac{1}{3}$.

c. Um vetor normal unitário à esfera unitária em cada ponto, $N(p)$, pode ser o próprio vetor posição[2], ou seja $N(p) = p$.

Para a curva α temos

$$\begin{aligned} \alpha' &= \left(-\frac{\sin t}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin t}{\sqrt{2}}, \cos t\right) \\ \alpha'' &= \left(-\frac{\cos t}{\sqrt{2}}, -\frac{\cos t}{\sqrt{2}}, -\sin t\right) = -\alpha \end{aligned}$$

Sendo N_α o vetor normal unitário à curva α, temos que $\alpha'' = \lambda N_\alpha$, já que $|\alpha'| = 1$ e α é uma curva plana. Como o vetor normal à esfera no ponto $\alpha(t)$ é $\alpha(t)$ temos que $\angle(N_\alpha, N(\alpha)) = \angle(\alpha'', \alpha) = \pi$.

Para a curva beta temos

$$\begin{aligned} \beta' &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin t, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t\right) \\ \beta'' &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos t, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin t\right) \end{aligned}$$

Como antes, indicando por N_β o vetor normal à curva β temos que $\beta'' = \lambda N_\beta$, pois $|\beta'| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e β também é uma curva plana. Deste modo, o ângulo θ entre N_β e $N(beta)$ satisfaz

$$\cos\theta = \frac{\langle N_\beta, N(\beta)\rangle}{|N_\beta||N(\beta)|} = \frac{-3/4}{\sqrt{3}/2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}.$$

[2] Na sua solução você poderia ter escolhido o vetor oposto e a resposta obtida difere da aqui apresentada por π.

Questão 6 (Valor: 3.0 pontos)**.** Seja $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2 - x^2\}$. Para cada $\theta \in [0,\pi]$ seja α_θ a curva dada pela interseção de S com o plano que contém o eixo Oz e faz ângulo θ com o eixo Ox.

a. Parametrize a curva α_θ.
b. Determine κ_{α_θ} (a curvatura de α_θ).
c. Determine os valores de θ para os quais κ_{α_θ} é máximo e mínimo no ponto $(0,0,0)$.

Dica. A curvatura de uma curva regular qualquer em $\mathbb{R}^3$ é dada por $\kappa = \dfrac{|\alpha' \wedge \alpha''|}{|\alpha'|^3}$.

Solução. **a.** Para cada $\theta \in [0,\pi]$ o plano em questão é dado pela equação $\cos\theta x + \sin\theta y = 0$, ou $y = -\cot\theta x$, se $\theta \neq 0, \pi$ e $x = 0$, se $\theta = 0, \pi$. Deste modo a curva dada pela interseção da superfície $z = y^2 - x^2$ com um desses planos pode ser parametrizada, para $t \in \mathbb{R}$, por

$$\alpha_\theta(t) = \begin{cases} (t, -\cot\theta t, (1-\cot^2\theta)t^2), & \text{se } \theta \neq 0,\pi \\ (0, t, -t^2), & \text{se } \theta = 0,\pi. \end{cases}$$

b. Seguindo a sugestão dada no enunciado, os ingredientes para o cálculo da curvatura de α_θ são

$$\alpha'_\theta = \begin{cases} (1, \cot\theta, 2(1-\cot^2\theta)t), & \text{se } \theta \neq 0,\pi \\ (0,1,-2t), & \text{se } \theta = 0,\pi \end{cases} \quad \text{e} \quad \alpha''_\theta = \begin{cases} (0,0,2(1-\cot^2\theta)), & \text{se } \theta \neq 0,\pi \\ (0,0,-2), & \text{se } \theta = 0,\pi. \end{cases}$$

Assim,

$$\kappa_{\alpha_\theta}(t) = \begin{cases} \frac{2|1-\cot^2\theta|\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\left(1+\cot^2\theta+4(1-\cot^2\theta)^2t^2\right)^{\frac{3}{2}}}, & \text{se } \theta \neq 0,\pi \\ \frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}, & \text{se } \theta = 0,\pi. \end{cases}$$

c. O ponto $(0,0,0)$ corresponde a $t = 0$ em cada α_θ. Queremos encontrar extremos da função $\kappa_{\alpha_\theta}(0) : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\kappa_{\alpha_\theta}(0) = \begin{cases} \frac{2|1-\cot^2\theta|}{1+\cot^2\theta} = -2|\cos(2\theta)|, & \text{se } \theta \neq 0,\pi \\ 2, & \text{se } \theta = 0,\pi. \end{cases}$$

Claramente o valor máximo de $\kappa_\theta(0)$ é atingido quando $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$, onde $\kappa_\theta(0) = 2$ e é mínimo quanto $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$, onde $\kappa_\theta(0) = 0$.

Observação 0.1. Note que aqui estamos considerando a curvatura sem sinal das curvas planas α_θ. Seria interessante e de grande utilidade para os próximos tópicos do curso estudar esse tipo de problema considerando a curvatura com sinal.