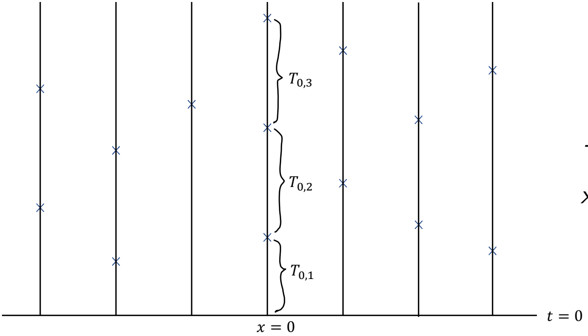
Sistemas Complexos

Luiz Renato Fontes

Modelo do votante

Sistema de partículas: inicialmente, $\eta_0 \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$: configuração de opiniões (0 ou 1) de indivíduos postados em $\mathbb{Z}^d$.

Cada indivíduo é equipado de um alarme. No desenrolar do tempo (contínuo) a partir do instante inicial ($t = 0$), cada alarme de cada indivíduo soa, independentemente dos demais, a taxa 1 (i.e., a intervalos iid com distribuição exponencial para cada indivíduo).



$T_{x,i} \sim \text{Exp}(1)$ iid,
$x \in \mathbb{Z}^d$, $i = 1, 2, \ldots$

Modelo do votante (cont)

Cada vez que o alarme soa para o indivíduo em $x \in \mathbb{Z}^d$, ele escolhe um de seus vizinhos mais próximos em $\mathbb{Z}^d$ uniformemente ao acaso, e adota a opinião que este indivíduo tem neste tempo; i.e., se s^* for um dos tempos em que o alarme de x soa e y for o vizinho de x selecionado neste tempo, então $\eta_{s^*}(x) = \eta_{s^*}(y)$.

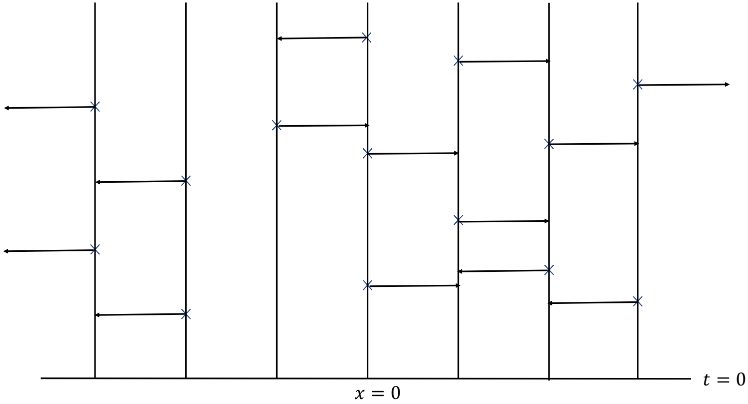
Note que este mecanismo de troca de opinião está bem definido localmente quase certamente pois não há coincidência de toques de alarme com probabilidade 1, i.e.,

$$\mathbb{P}(S_{x,i} = S_{y,j} \text{ para algum } x \neq y \text{ ou } i \neq j) = 0,$$

onde $S_{x,n} = \sum_{\ell=1}^{n} T_{x,i}$, $n \geq 1$, $x \in \mathbb{Z}^d$

Vamos a seguir apontar uma propriedade chave deste modelo, formulada em termos de um objeto chave, definido a partir dos mesmos ingrediente do modelo, que em particular implica em que ele está bem definido globalmente para todo tempo quase certamente. Começamos com o segundo.

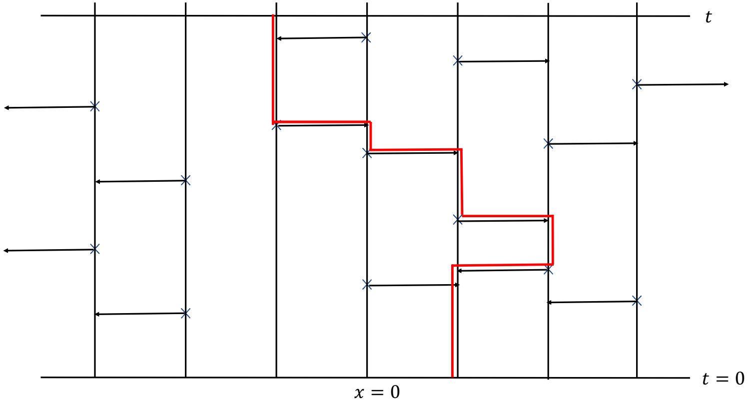
Modelo do votante (cont)



Setas a partir de cada indivíduo, num toque de seu alarme, apontam para o vizinho a ser consultado na adoção de nova opinião.

Passeios aleatórios coalescentes em tempo reverso

Para $x \in \mathbb{Z}^d$ e $t > 0$, seja $X^{x,t}(s)$, $0 \leq s \leq t$ o processo de saltos cuja trajetória começa em (x, t) e percorre o espaço-tempo em sentido temporal *contrário* ao do tempo do modelo do votante, inicialmente seguindo a linha de tempo a partir de (x, t) (para trás no tempo); quando encontra uma marca de toque de alarme, a trajetória salta para o vizinho da posição corrente, seguindo a seta.



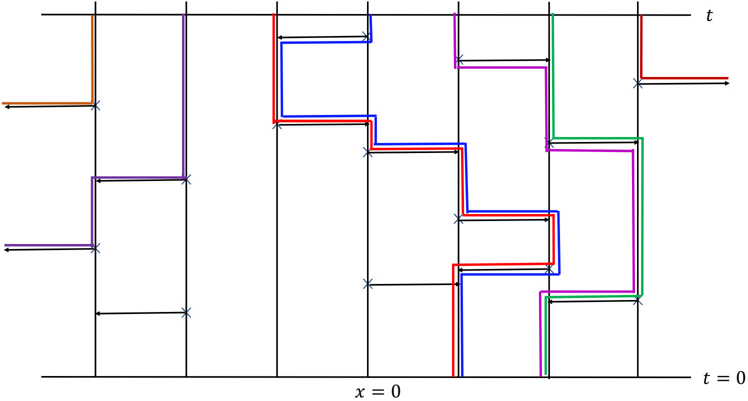
Passeios aleatórios coalescentes em tempo reverso (cont)

Na figura, temos $X^{-1,t}(t) = (1, 0)$.

Notemos que para cada $x \in \mathbb{Z}^d$ e $t \geq 0$ fixos, $X^{x,t}(s)$, $0 \leq s \leq t$ é um passeio aleatório simples e simétrico em $\mathbb{Z}^d$ começando em x.

Para pares distintos $(x_1, t_1), \ldots, (x_k, t_k)$, $k \geq 2$, $X^{x_i,t_i}(\cdot)$, $i = 1, \ldots k$, são *passeios aleatórios coalescentes*, isto é, são passeios aleatórios independentes até (eventualmente) se encontrarem, quando coalescem e seguem juntos a partir daí.

Passeios aleatórios coalescentes em tempo reverso (cont)



Dualidade

O modelo do votante ($\eta_t = \{\eta_t(x); x \in \mathbb{Z}^d\}, t \geq 0$) exibe uma relação de *dualidade* com o sistema de passeios aleatórios coalescentes $\{X^{x,t}(\cdot); x \in \mathbb{Z}^d, t \geq 0\}$:

$$\eta_t(x) = \eta_0(X^{x,t}(t)) \text{ para cada } x \in \mathbb{Z}^d, t \geq 0. \tag{1}$$

Para mostrar que (1) está bem definido quase certamente para todo (x, t), $x \in \mathbb{Z}^d$, $t \geq 0$, simultaneamente*, basta fazer isto para cada $(x, S_{x,i})$, $x \in \mathbb{Z}^d$, $i \geq 1$† (pois para cada $S_{x,i-1} < t < S_{x,i}$, temos que $X^{x,t}(s) = x$, se $0 \leq s < t - S_{x,i-1}$), e $X^{x,t}(t - S_{x,i-1}) = X^{x,S_{x,i-1}}(0)$, onde $S_{x,0} \equiv 0$).

Para que que $X^{x,S_{x,i}}$ esteja bem definido para dado $x \in \mathbb{Z}^d$ e $i \geq 1$, basta que não seja *explosivo*, isto é, não dê um número infinito de saltos em tempo finito. Isto é claramente verdadeiro (quase certamente) para cada $x \in \mathbb{Z}^d$ e $i \geq 1$ individualmente, e logo simultaneamente.

---

*Note que se trata de um conjunto não enumerável de condições.

†Neste caso, temos um conjunto enumerável de condições.

Comportamento assintótico do modelo

$(\eta_t,\ t \geq 0)$ está então bem definido, e é um processo de Markov em Ω.

Queremos estudar o comportamento assintótico da distribuição de η_t quando $t \to \infty$

Para isto, vamos supor que η_0, a condição inicial do modelo do votante, tenha distribuição π_α, a probabilidade produto em $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ tq $\pi_\alpha(\eta(0) = 1) = \alpha$.

Vamos usar a dualidade com os passeio aleatórios coalescentes para escrever

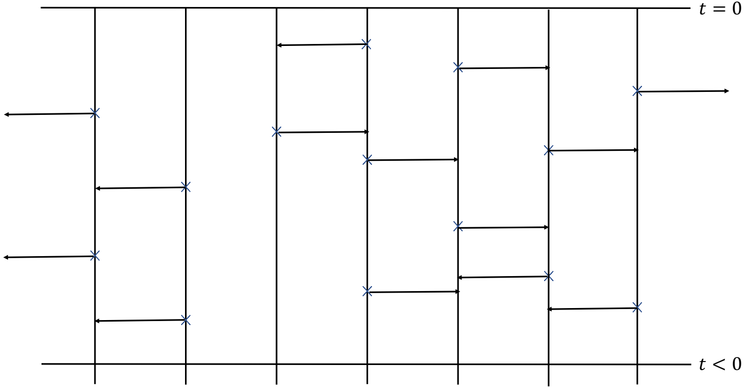
$$\eta_t(x) = \eta_0(X^{x,t}(t)),\ x \in \mathbb{Z}^d, t \geq 0.$$

Notemos a seguir que para cada $t \geq 0$,

$$\{\eta_t(x),\ x \in \mathbb{Z}^d\} \sim \{\tilde{\eta}_t(x) = \eta_0(\tilde{X}^x(t)),\ x \in \mathbb{Z}^d\}, \tag{2}$$

onde $\tilde{\mathcal{X}} = \{\tilde{X}^x(\cdot),\ x \in \mathbb{Z}^d\}$ é um sistema de passeio aleatórios coalescentes em tempo reverso começando no tempo 0.

Tempos e endereços de salto de $\{\tilde{X}^x(\cdot),\ x \in \mathbb{Z}^d\}$



Classes coalescidas

Para $0 \leq t \leq \infty$, seja $\overset{t}{\sim}$ a relação de equivalência em $\mathbb{Z}^d$ tq $x \overset{t}{\sim} y$ se X^x e X^y coalescerem até o tempo t, e seja $\mathcal{C}_t = \{C\}$ a família de classes de equivalência determinadas por $\overset{t}{\sim}$, que particionam $\mathbb{Z}^d$.

Seja ν_t a distribuição de probabilidade de $\{\tilde{\eta}_t(x),\, x \in \mathbb{Z}^d\}$. Então, dado $\tilde{\mathcal{X}}$, temos que a cada cada classe de $\mathcal{C}_t$, independentemente das demais, será atribuída (por $\nu_t(\cdot|\tilde{\mathcal{X}})$) opinião identicamente igual a 1 com probabilidade α, e opinião identicamente igual a 0 com probabilidade $1 - \alpha$.

Para cada $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{Z}^d$, seja $C_x(t)$ a classe de $\mathcal{C}_t$ a que pertence x, e note que, para $0 \leq s \leq t$, temos que

$$C_x(s) \subset C_x(t) \text{ e } C_x(\infty) = \cup_{t \geq 0} C_x(t).$$

Distribuição assintótica

Segue de (3) que $\nu_t(\cdot|\tilde{\mathcal{X}}) \to \nu_\infty(\cdot|\tilde{\mathcal{X}})$ quando $t \to \infty$. (Verifique.)

Teorema 1. $\{\eta_t(x),\, x \in \mathbb{Z}^d\} \Rightarrow \mu_\alpha := \nu_\infty$ quando $t \to \infty$.

Dem. Segue imediatamentente de (2) e da observação acima.

Teorema 2. (*Aglomeração*)

Em $d = 1$ e 2, $\mu_\alpha = \alpha\delta_{\mathbf{1}} + (1-\alpha)\delta_{\mathbf{0}}$,

onde $\delta_{\mathbf{1}}$ é a medida que atribui prob 1 à configuração $\eta \equiv 1$, e $\delta_{\mathbf{0}}$ é a medida que atribui prob 1 à configuração $\eta \equiv 0$.

Teorema 3. (*Coexistência*)

Em $d \geq 3$, μ_α atribui probabilidade 1 a

$\{\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d} : \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \eta(x) = \infty$ e $\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} (1 - \eta(x)) = \infty\}$.

Aglomeração vs Coexistência

Para ambas demonstrações, notemos que para $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $X^x(\cdot) - X^y(\cdot)$ é um passeio simples e simétrico em $\mathbb{Z}^d$ (em tempo contínuo) com absorção na origem (ie, é uma cadeia de Markov em $\mathbb{Z}^d$ com as transições do passeio aleatório simples e simétrico em toda parte, a não ser na origem, onde é absorvente).

Dem. do Teo 2: Como o passeio aleatório simples e simétrico é recorrente em $\mathbb{Z}^d$, $d = 1$ e 2, temos que $\mathcal{C}_\infty = \mathbb{Z}^d$ qc nestes casos. O resultado segue imediatamente.

Dem. do Teo 3: Basta mostrar que há qc infinitas classes (distintas) de $\mathcal{C}_\infty$. Para isto, vamos mostrar que há qc uma sequência infinita $(x_n)_{n\geq 1}$ tq $x_1 = 0$ e $C_{x_i}(\infty) \neq C_{x_j}(\infty)$ se $i, j \geq 0$, $i \neq j$.

Dem. do Teo 3 (cont)

Seja $\tilde{\mathbb{P}}$ a distribuição de $\tilde{\mathcal{X}}$, e consideremos o evento

$$A = \{\forall n \geq 1 \text{ e } y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{Z}^d, \exists y_n \in \mathbb{Z}^d \text{ tq} \\ C_{y_n}(\infty) \neq C_{y_i}(\infty) \text{ se } i = 0, \dots, n-1\}.$$

Vamos mostrar que $\tilde{\mathbb{P}}(A) = 1$. Basta considerar o caso em que $n \geq 1$ e $y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{Z}^d$ estão fixos (pois se trata de uma quantidade enumerável de condições).

Como o passeio aleatório simples e simétrico é recorrente em $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$, dado $z \in \mathbb{Z}^d$, temos que a prob de X^z e X^{y_i} coalescerem (eventualmente) se anula no limite em que $|z| \to \infty$ para cada $i = 0, \dots, n-1$.

Seja B_z o evento em que para, algum $i = 0, \dots, n-1$, X^z e X^{y_i} coalescem. Então $\tilde{\mathbb{P}}(B_z) \to 0$ qdo $|z| \to \infty$.

Logo, existe uma sequência (z_k) tal que $\sum_k \tilde{\mathbb{P}}(B_{z_k}) < \infty$, e por Borel-Cantelli, existe qc $N < \infty$ tq X^{z_N} e X^{y_i} não coalescem para cada $i = 0, \dots, n-1$. Basta então tomar $y_n = z_N$. $\square$